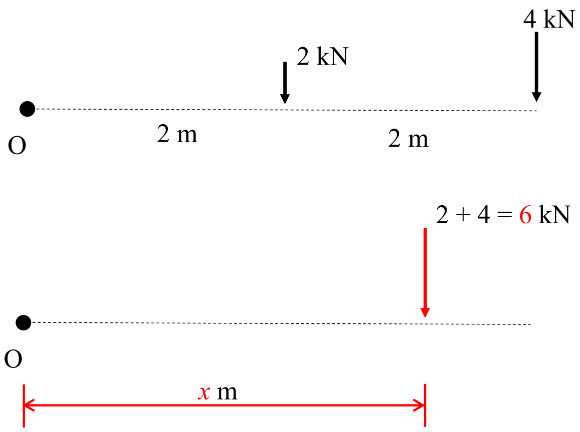
練習問題解答（詳細版）

（練習問題の番号は本書の項目番号に対応）

３．（１）バリニオンの定理を用いて以下の２つの力を合成し大きさを付して図示せよ。

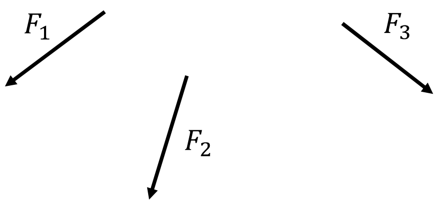


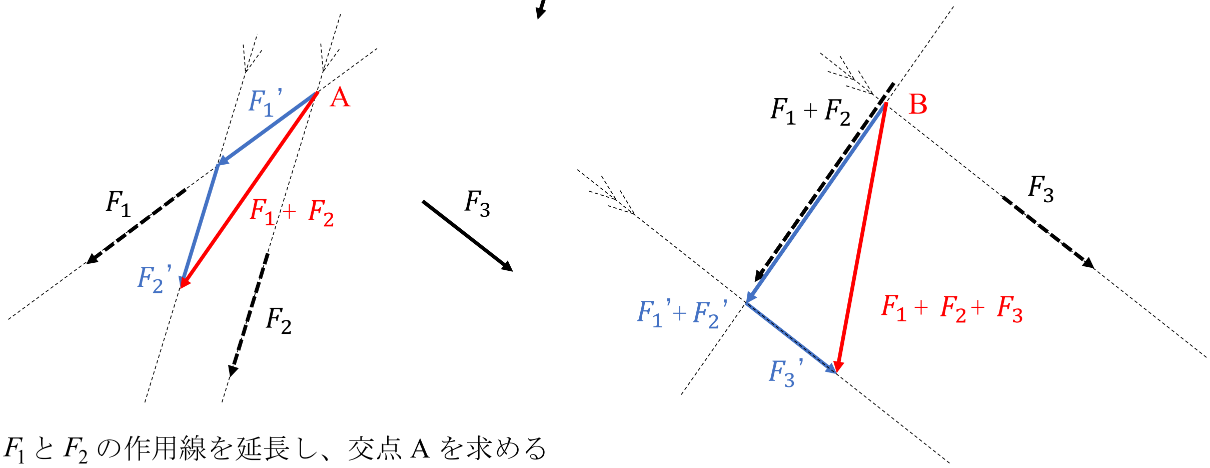
バリニオンの定理より、O 点まわりの力のモーメントは下式のとおり

$$2 \times 2 + 4 \times 4 = 6 \times x$$

これより、$x = \dfrac{10}{3}$

（２）平行ではない２つの力の合成法を繰り返し用いて以下の３つの力を合成せよ。





(i)　F_1 と F_2 の作用線を延長し、交点 A を求める

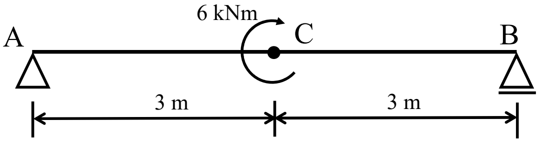
(ii)　F_1 と F_2 の合力 $F_1 + F_2$ を求める

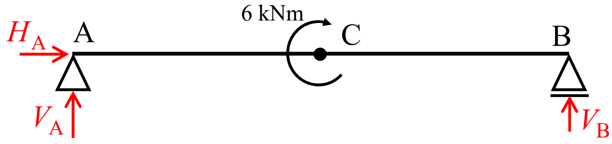
(iii)　$F_1 + F_2$ と F_3 の作用線を延長し、交点 B を求める

(iv)　$F_1 + F_2$ と F_3 の合力 $F_1 + F_2 + F_3$ を求める

6．以下に示す単純梁、片持梁、ゲルバー梁の支点反力を求めよ。

（1）





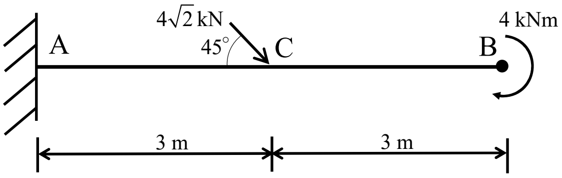
全体の釣合いより

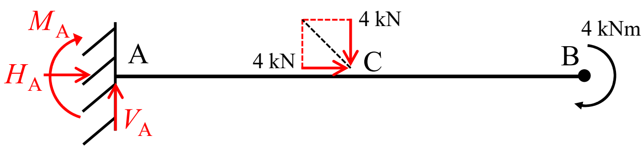
$$\sum X = 0 \quad : \; H_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad : \; V_A + V_B = 0 \quad \rightarrow \; V_A = -1\text{kN} \quad \text{（以下も考慮して）}$$

$$\sum{}_A M = 0 \quad : \; -V_B \times 6 + 6 = 0 \quad \rightarrow \; V_B = 1\text{kN}$$

（2）





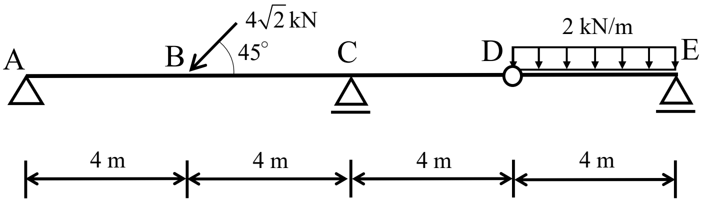
全体の釣合いより

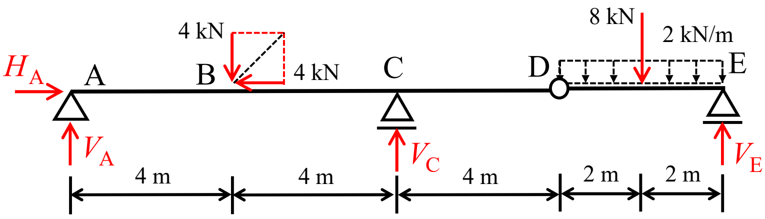
$$\sum X = 0 \quad : \; H_A + 4 = 0 \quad \rightarrow \; H_A = -4\text{kN}$$

$$\sum Y = 0 \quad : \; V_A - 4 = 0 \quad \rightarrow \; V_A = 4\text{kN}$$

$$\sum{}_A M = 0 \quad : \; M_A + 4 \times 3 + 4 = 0 \quad \rightarrow \; M_A = -16\text{kNm}$$

（3）





全体の釣合いより

$$\sum X = 0 \quad : \; H_A - 4 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad : \; V_A + V_C + V_E - 4 - 8 = 0$$

$$\sum{}_A M = 0 \quad : -V_C \times 8 - V_E \times 16 + 4 \times 4 + 8 \times 14 = 0$$

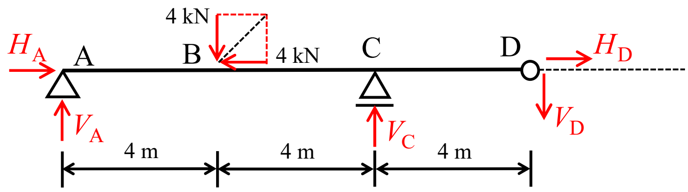
DE 部分の自由体の釣合いより

$$\sum{}_D M = 0 \quad : -V_E \times 4 + 8 \times 2 = 0$$

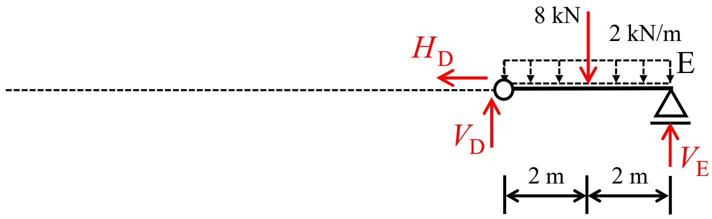
これらを連立させて

$$H_A = 4\text{kN}\,,\; V_A = 0\text{kN}\,,\; V_C = 8\text{kN}\,,\; V_E = 4\text{kN}$$

（別解）ピンで梁を分けて考える。



$$\sum X = 0 \quad : \ H_A + H_D - 4 = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \ V_A + V_C - V_D - 4 = 0$$
$$\sum {}_D M = 0 \ : \ V_A \times 12 + V_C \times 4 - 4 \times 8 = 0$$



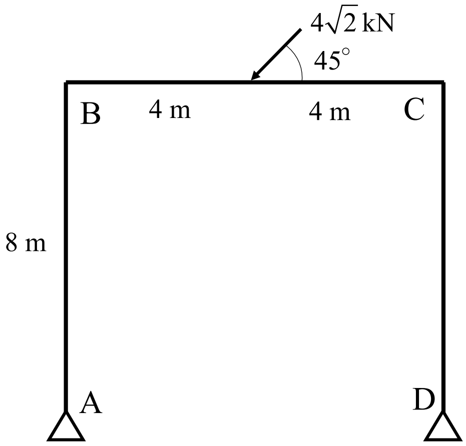
$$\sum X = 0 \quad : \ H_D = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \ V_D + V_E - 8 = 0$$
$$\sum {}_D M = 0 \ : \ 8 \times 2 - V_E \times 4 = 0$$

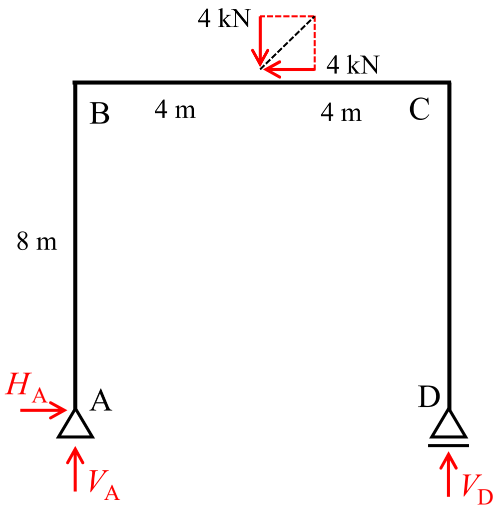
これらを連立させて

$$H_A = 4\text{kN} \ , \ V_A = 0\text{kN} \ , \ V_C = 8\text{kN} \ , \ V_E = 4\text{kN}$$

7．以下に示す門型ラーメン、３ヒンジラーメンの支点反力を求めよ。

（１）





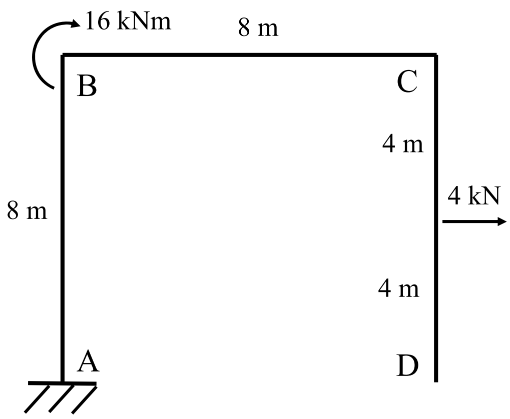
全体の釣合いより

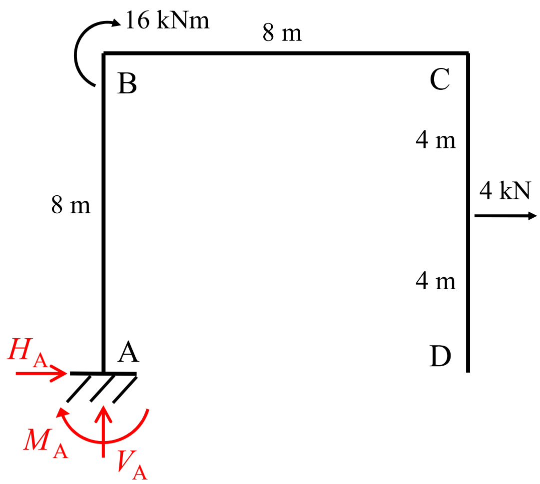
$\sum X = 0 \quad : \ H_A - 4 = 0 \qquad \rightarrow \ H_A = 4\,\mathrm{kN}$

$\sum Y = 0 \quad : \ V_A + V_D - 4 = 0 \qquad \rightarrow \ V_A = 6\,\mathrm{kN}$ （以下も考慮して）

$\sum {}_A M = 0 \ : \ -V_D \times 8 + 4 \times 4 - 4 \times 8 = 0 \qquad \rightarrow \ V_D = -2\,\mathrm{kN}$

（２）





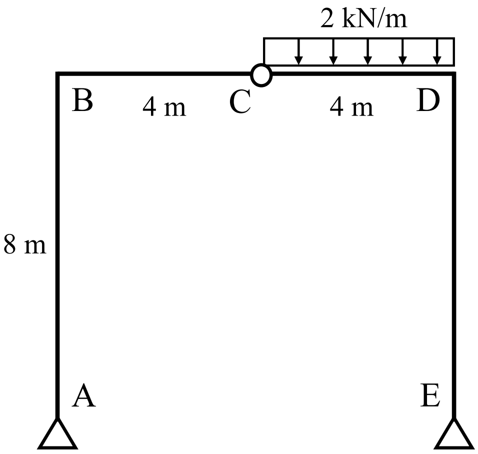
全体の釣合いより

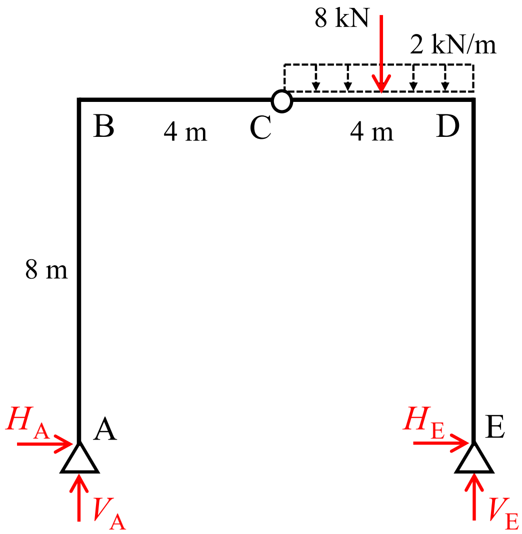
$\sum X = 0 \quad : \ H_A + 4 = 0 \qquad \rightarrow \ H_A = -4\,\mathrm{kN}$

$\sum Y = 0 \quad : \ V_A = 0$

$\sum {}_A M = 0 \ : \ M_A + 16 + 4 \times 4 = 0 \qquad \rightarrow \ M_A = -32\,\mathrm{kNm}$

（3）

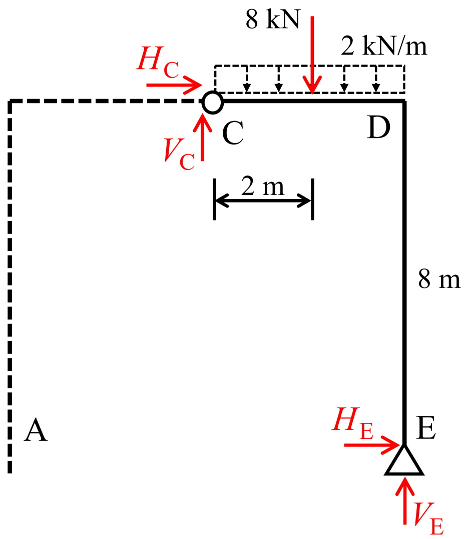




(方法 1)

全体の釣合いより

$$\sum X = 0 \quad : \; H_A + H_E = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \; V_A + V_E - 8 = 0$$
$$\sum{}_A M = 0 \quad : -V_E \times 8 + 8 \times 6 = 0$$



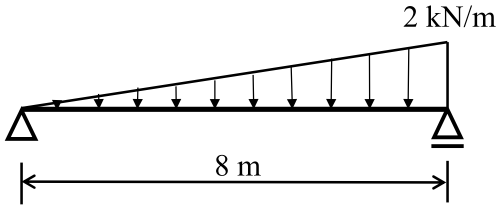
CE 部分の自由体の釣合いより

$$\sum{}_C M = 0 \quad : -V_E \times 4 - H_E \times 8 + 8 \times 2 = 0$$

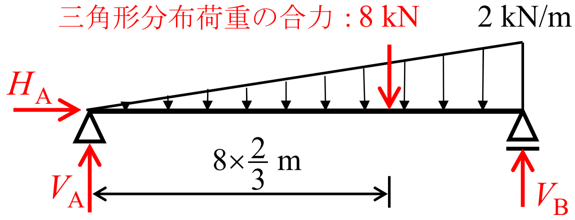
これらを連立させて

$$H_A = 1\text{kN} \; , \; V_A = 2\text{kN} \; , \; H_E = -1\text{kN} \; , \; V_E = 6\text{kN}$$

8．以下の図(a)に示す単純梁の支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。



(a)



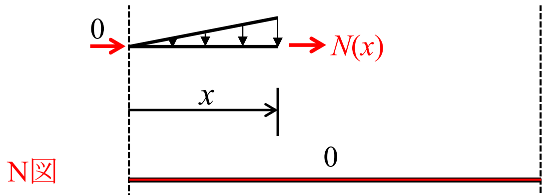
全体の釣合いより支点反力を求める。

$$\sum X=0 \quad : \; H_A=0 \qquad \rightarrow \; H_A=0\,\text{kN}$$

$$\sum Y=0 \quad : \; V_A+V_B-8=0 \qquad \rightarrow \; V_A=\frac{8}{3}\,\text{kN} \quad \text{（以下も考慮して）}$$

$$\sum{}_A M=0 \quad : \; -V_B\times 8+8\times\left(8\times\frac{2}{3}\right)=0 \qquad \rightarrow \; V_B=\frac{16}{3}\,\text{kN}$$

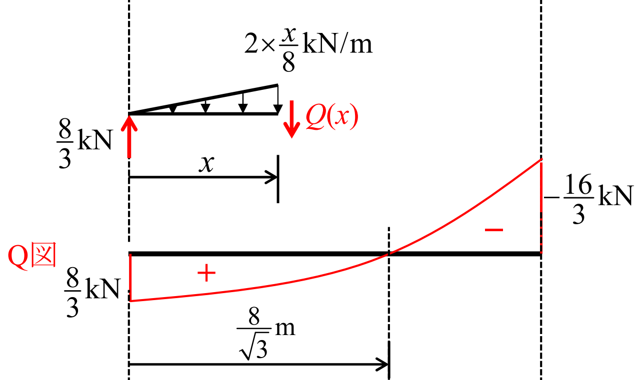
次に断面力を求める



自由体の釣合いより

$$\sum X=0$$

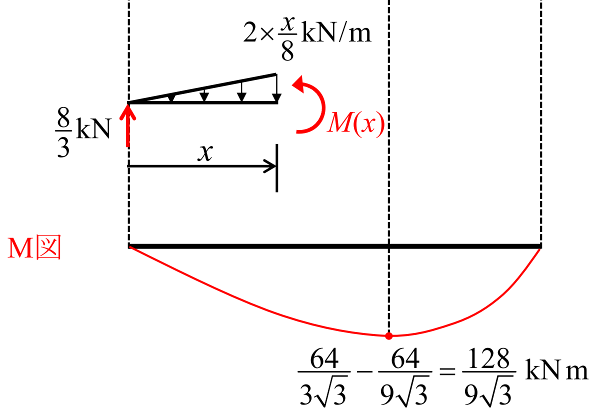
$$N(x)=0\,\text{kN}$$



自由体の釣合いより

$$\sum Y=0 \quad : \; -Q(x)+\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{x}{8}\times x=0$$

$$Q(x)=\frac{8}{3}-\frac{x^2}{8}\,(\text{kN})$$

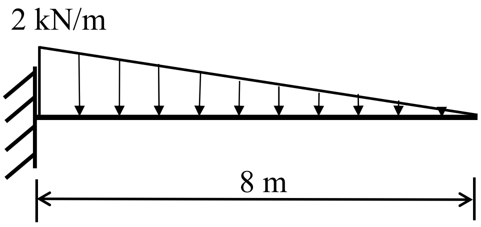


自由体の釣合いより

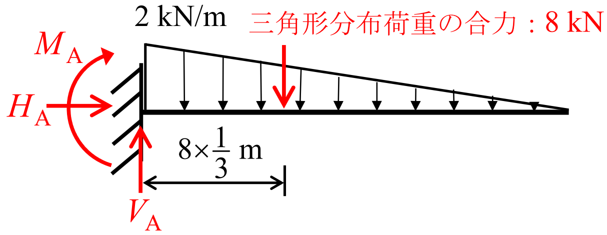
$$\sum{}_x M=0 \quad : -M(x)+\frac{8}{3}\times x-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{x}{8}\times x\times\frac{x}{3}=0$$

$$M(x)=\frac{8}{3}x-\frac{x^3}{24}\,(\text{kNm})$$

９．８の図(b)に示す片持梁の支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。



(b)



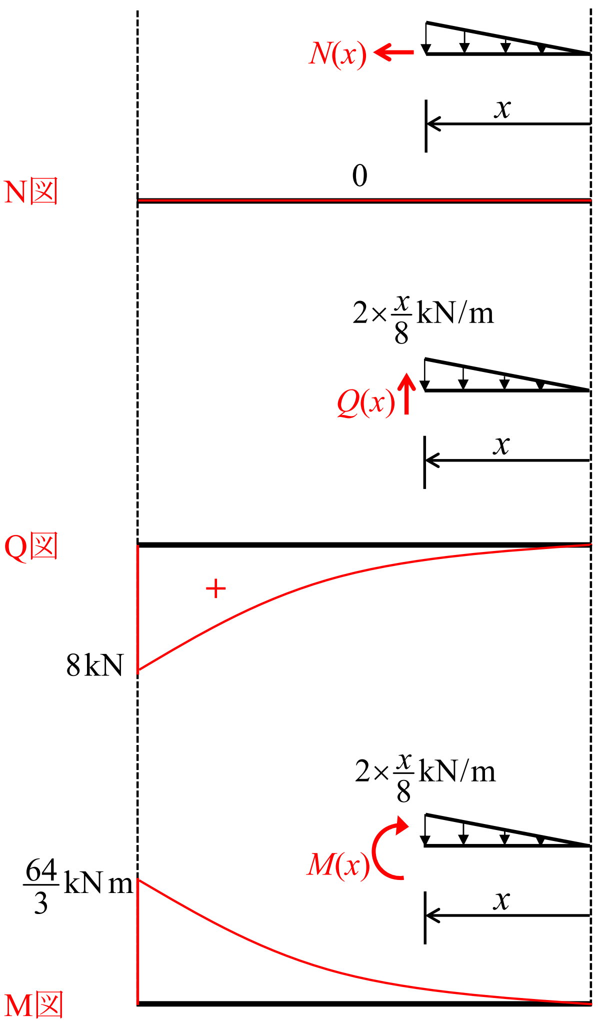
全体の釣合いより支点反力を求める。

$$\sum X=0 \quad : \; H_A=0 \qquad \rightarrow H_A=0\,\mathrm{kN}$$

$$\sum Y=0 \quad : \; V_A-8=0 \qquad \rightarrow V_A=8\,\mathrm{kN}$$

$$\sum {}_A M=0 \; : \; M_A+8\times(8\times\frac{1}{3})=0 \quad \rightarrow M_A=-\frac{64}{3}\,\mathrm{kN\,m}$$

次に断面力を求める



自由体の釣合いより

$$\sum X=0$$

$$N(x)=0\,\mathrm{kN}$$

自由体の釣合いより

$$\sum Y=0 \quad : \; Q(x)-\frac{1}{2}\times2\times\frac{x}{8}\times x=0$$

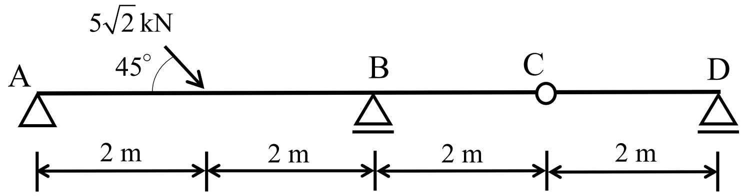
$$Q(x)=\frac{x^2}{8}\,\mathrm{kN}$$

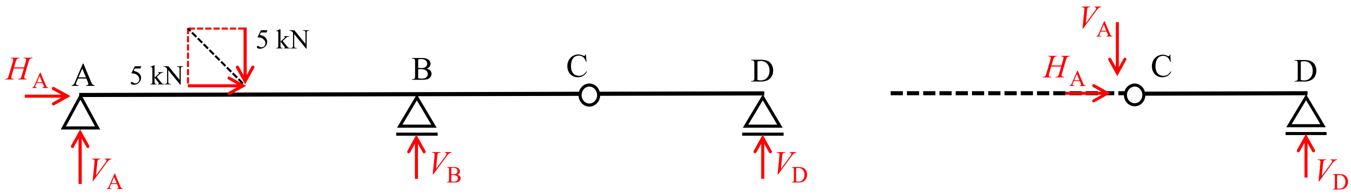
自由体の釣合いより

$$\sum {}_x M=0 \quad : \; M(x)+\frac{1}{2}\times2\times\frac{x}{8}\times x\times\frac{x}{3}=0$$

$$M(x)=-\frac{x^3}{24}\,\mathrm{kN\,m}$$

１０．以下に示すゲルバー梁の支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。





(方法 1)
全体の釣合いより支点反力を求める。

$$\sum X = 0 \quad : \ H_A + 5 = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \ V_A + V_B + V_D - 5 = 0$$
$$\sum{}_A M = 0 \ : \ -V_B \times 4 - V_D \times 8 + 5 \times 2 = 0$$

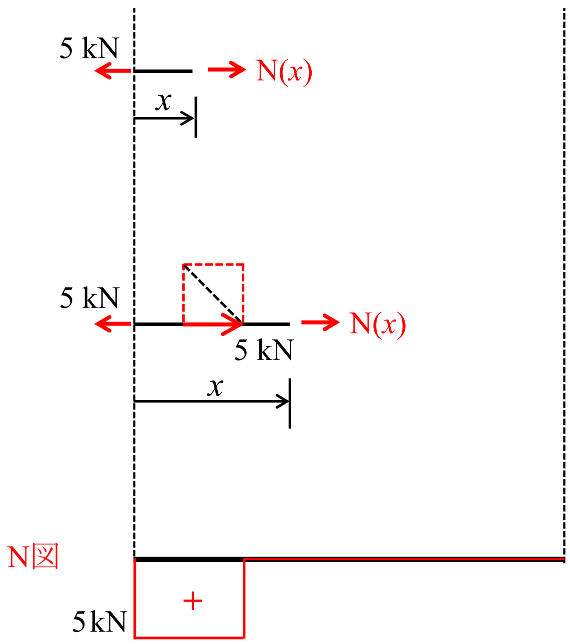
CD 部分の自由体の釣合いより

$$\sum{}_C M = 0 \ : \ -V_D \times 2 = 0$$

これらを連立させて

$$H_A = -5\text{kN}\ ,\ V_A = 2.5\text{kN}\ ,\ V_B = 2.5\text{kN}\ ,\ V_D = 0\text{kN}$$

次に断面力を求める。

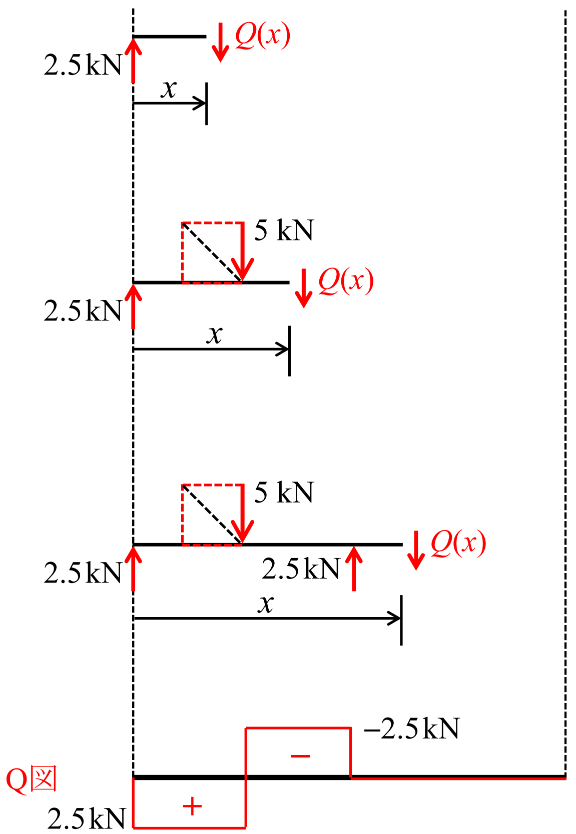


A～AB の中点の区間について、
自由体の釣合いより

$$\sum X = 0 \quad : \ N(x) - 5 = 0$$
$$N = 5\text{kN}$$

AB の中点～D の区間について、
自由体の釣合いより

$$\sum X = 0 \quad : \ N(x) + 5 - 5 = 0$$
$$N(x) = 0\text{kN}$$



A～AB の中点の区間について、

自由体の釣合いより

$\sum \mathrm{Y}=0 \quad : \; -Q(x)+2.5=0$

$Q(x)=2.5\,\mathrm{kN}$

AB の中点～B の区間について、

自由体の釣合いより

$\sum \mathrm{Y}=0 \quad : \; -Q(x)+2.5-5=0$

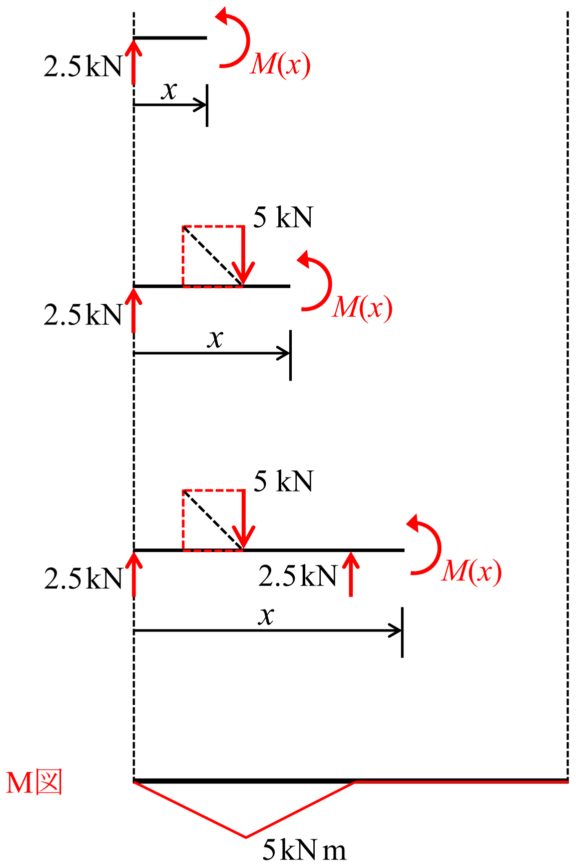
$Q(x)=-2.5\,\mathrm{kN}$

B～D の区間について、

自由体の釣合いより

$\sum \mathrm{Y}=0 \quad : \; -Q(x)+2.5-5+2.5=0$

$Q(x)=0\,\mathrm{kN}$



A～AB の中点の区間について、

自由体の釣合いより

$\sum_x \mathrm{M}=0 \quad : \; -M(x)+2.5\times x=0$

$M(x)=2.5x\ \mathrm{kNm}$

AB の中点～B の区間について、

自由体の釣合いより

$\sum_x \mathrm{M}=0 \quad : \; -M(x)+2.5\times x-5(x-2)=0$

$M(x)=-2.5x+10\ \mathrm{kNm}$

B～D の区間について、

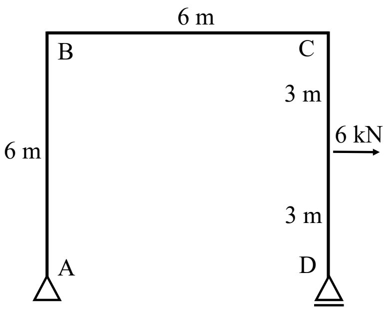
自由体の釣合いより

$\sum_x \mathrm{M}=0$

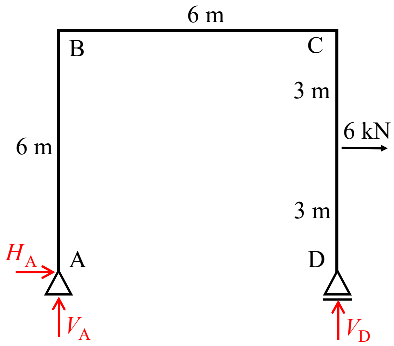
$-M(x)+2.5\times x-5(x-2)+2.5(x-4)=0$

$M(x)=0\ \mathrm{kNm}$

１１．以下の図(a)に示す門型ラーメンの支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。



(a)



全体の釣合いより支点反力を求める。

$$\sum X = 0 \quad : \ H_A + 6 = 0$$

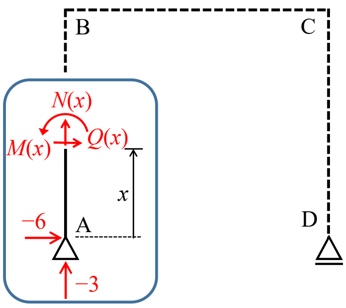
$$\sum Y = 0 \quad : \ V_A + V_D = 0$$

$$\sum{}_A M = 0 \ : \ -V_D \times 6 + 6 \times 3 = 0$$

これらを連立式させて

$$H_A = -6\,\mathrm{kN}\ ,\ V_A = -3\,\mathrm{kN}\ ,\ V_D = 3\,\mathrm{kN}$$

自由体の釣合いより断面力を求める。



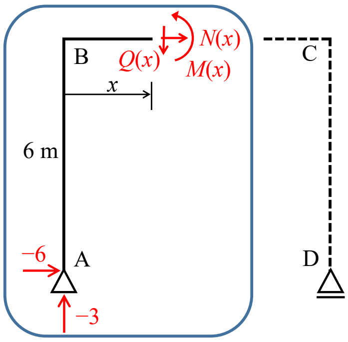
A～B の区間について

$$\sum X = 0 \quad : \ Q(x) - 6 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad : \ N(x) - 3 = 0$$

$$\sum{}_x M = 0 \ : \ -M(x) + 6 \times x = 0$$

$$N(x) = 3,\ Q(x) = 6,\ M(x) = 6x$$



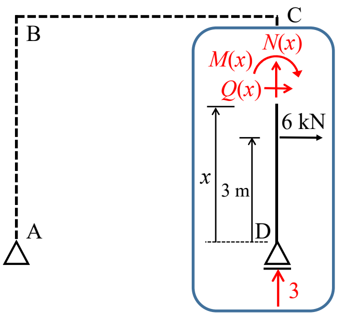
B～C の区間について

$$\sum X = 0 \quad : \ N(x) - 6 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad : \ -Q(x) - 3 = 0$$

$$\sum{}_x M = 0 \ : \ -M(x) + 6 \times 6 - 3 \times x = 0$$

$$N(x) = 6,\ Q(x) = -3,\ M(x) = -3x + 36$$



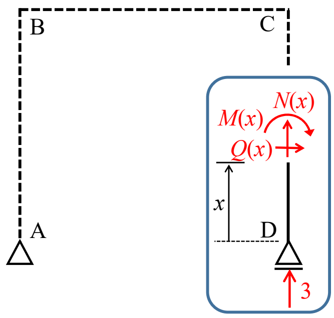
C～CD の中点の区間について

$$\sum X = 0 \quad : \ Q(x) + 6 = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad : \ N(x) + 3 = 0$$

$$\sum{}_x M = 0 \ : \ M(x) - 6 \times (x - 3) = 0$$

$$N(x) = -3,\ Q(x) = -6,\ M(x) = 6x - 18$$



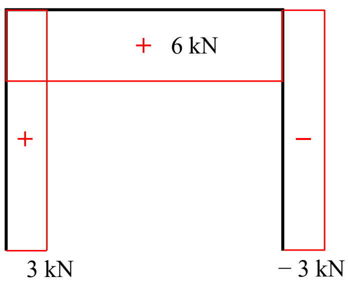
D～CD の中点の区間について

$$\sum X=0 \quad : \quad Q(x)=0$$

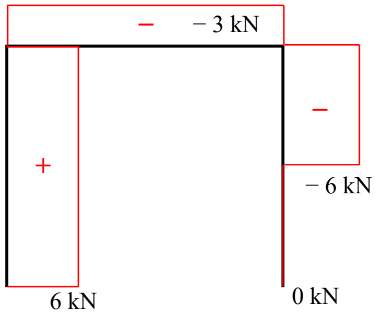
$$\sum Y=0 \quad : \quad N(x)+3=0$$

$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad M(x)=0$$

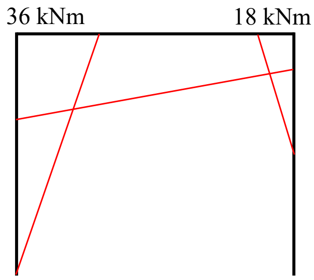
$$N(x)=-3,\ Q(x)=0,\ M(x)=0$$



N図

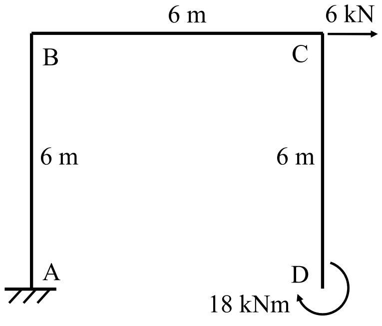


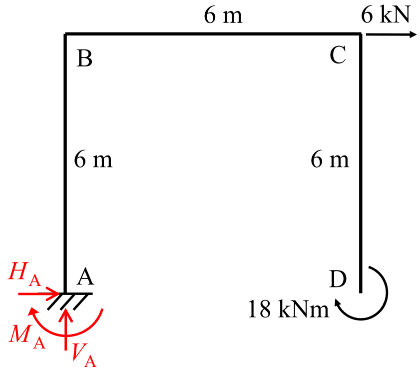
Q図



M図

１２．１１の図(b)に示す門型ラーメンの支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。





(b)

全体のつりあいより支点反力を求める。

$$\sum X=0 \quad : \quad H_A+6=0$$

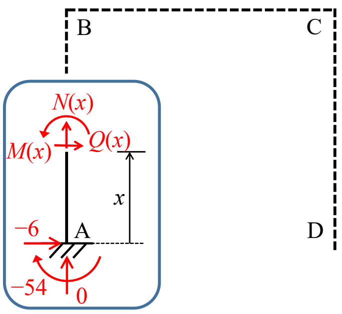
$$\sum Y=0 \quad : \quad V_A=0$$

$$\sum{}_A M=0 \quad : \quad M_A+6\times6+18=0$$

これらより

$$H_A=-6\,\mathrm{kN}\ ,\ V_A=0\,\mathrm{kN}\ ,\ M_A=-54\,\mathrm{kNm}$$

自由体の釣合いより断面力を求める。



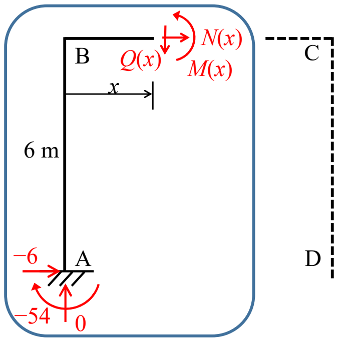
A～B の区間について

$$\sum X=0 \quad : \quad Q(x)-6=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \quad N(x)=0$$

$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad -M(x)-54+6\times x=0$$

$$N(x)=0,\ Q(x)=6,\ M(x)=6x-54$$



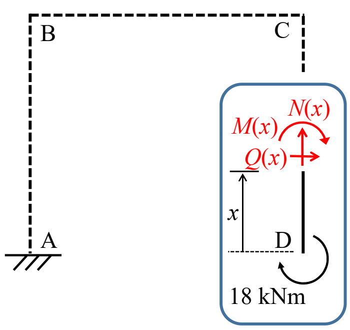
B～C の区間について

$$\sum X=0 \quad : \quad N(x)-6=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \quad -Q(x)=0$$

$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad -M(x)+6\times6-54=0$$

$$N(x)=6,\ Q(x)=0,\ M(x)=-18$$



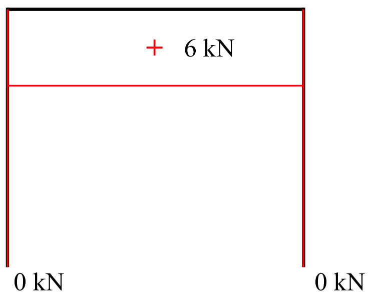
D～C の区間について

$$\sum X=0 \quad : \quad Q(x)=0$$

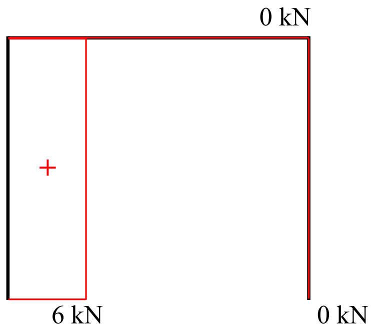
$$\sum Y=0 \quad : \quad N(x)=0$$

$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad M(x)+18=0$$

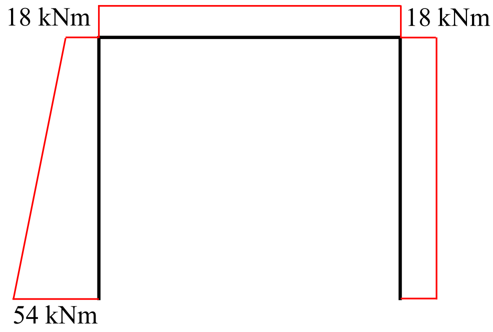
$$N(x)=0,\ Q(x)=0,\ M(x)=-18$$



N図

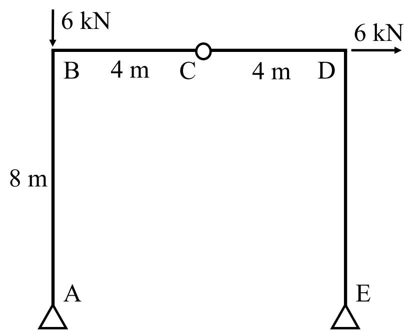


Q図

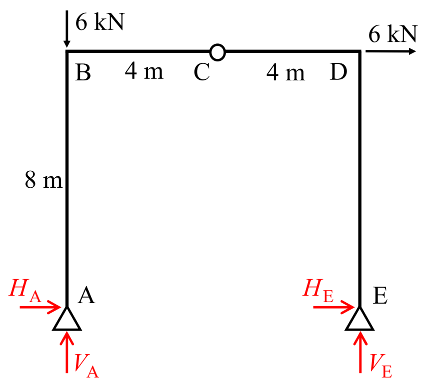


M図

１３．１１の図(c)に示す３ヒンジラーメンの支点反力を求め、断面力図（N, Q, M 図）を描け。

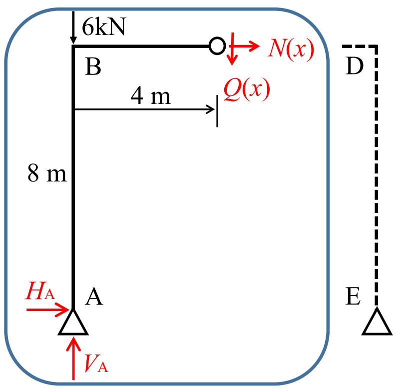


(c)



テキストの方法１で解く。
全体の釣合いより

$$\sum X = 0 \quad : \ H_A + H_E + 6 = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \ V_A + V_E - 6 = 0$$
$$\sum {}_A M = 0 \ : \ -V_E \times 8 + 6 \times 8 = 0$$



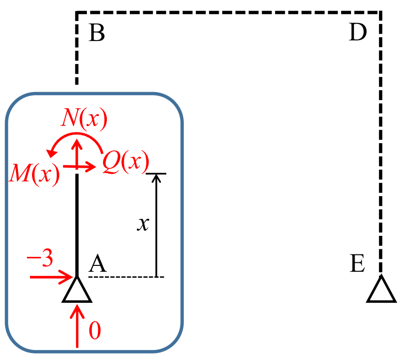
AC 部分の自由体の釣合いより

$$\sum {}_C M = 0 \ : \ V_A \times 4 - H_A \times 8 - 6 \times 4 = 0$$

これらを連立させて

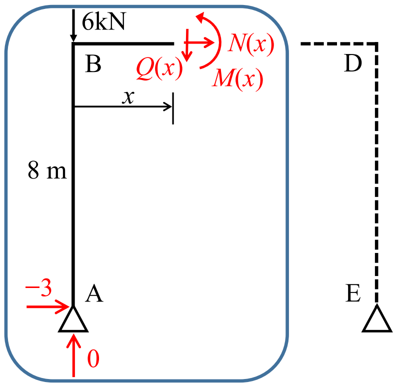
$$H_A = -3\text{kN}\ ,\ V_A = 0\text{kN}\ ,\ H_E = -3\text{kN}\ ,\ V_E = 6\text{kN}$$

次に、自由体の釣合いより断面力を求める。



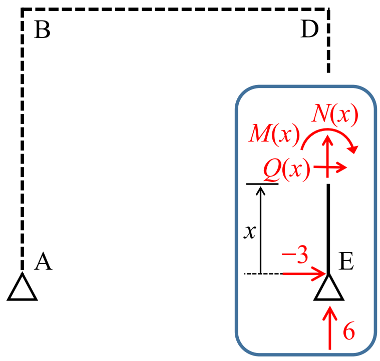
A〜B の区間について

$$\sum X = 0 \quad : \ Q(x) - 3 = 0$$
$$\sum Y = 0 \quad : \ N(x) = 0$$
$$\sum {}_x M = 0 \ : \ -M(x) + 3 \times x = 0$$
$$N(x) = 0,\ Q(x) = 3,\ M(x) = 3x$$



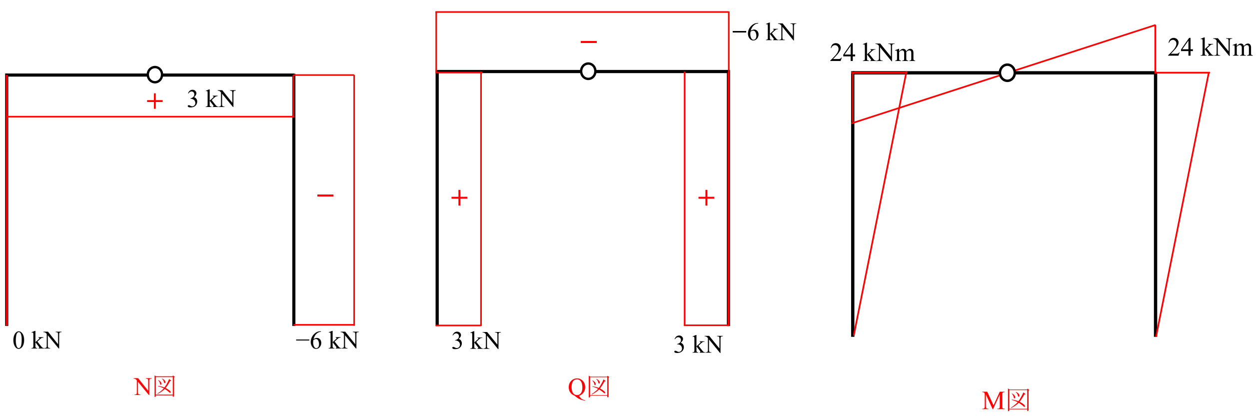
B～D の区間について

$$\sum X=0 \quad : \quad N(x)-3=0$$
$$\sum Y=0 \quad : \quad -Q(x)-6=0$$
$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad -M(x)-6\times x+3\times 8=0$$
$$N(x)=3,\ Q(x)=-6,\ M(x)=-6x+24$$

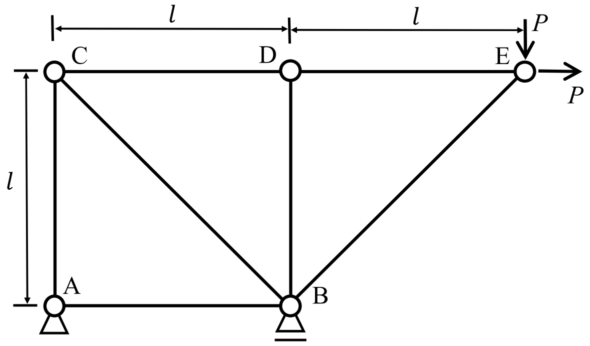


E～D の区間について

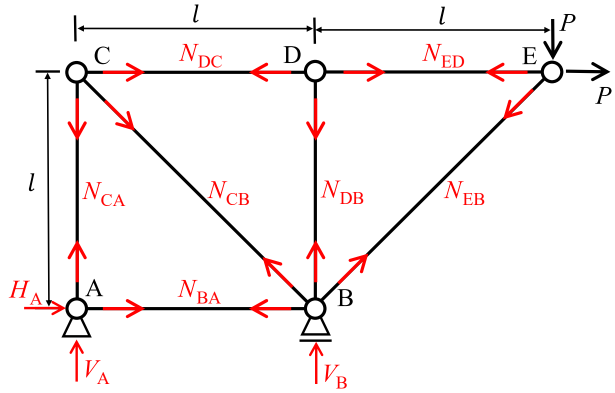
$$\sum X=0 \quad : \quad Q(x)-3=0$$
$$\sum Y=0 \quad : \quad N(x)+6=0$$
$$\sum{}_x M=0 \quad : \quad M(x)+3\times x=0$$
$$N(x)=-6,\ Q(x)=3,\ M(x)=-3x$$



１７．以下の図(a)に示す静定トラスの部材力を節点法を用いて求めよ。



(a)



節点 E における力の釣合いより

$$\sum X=0 \quad : \ -N_{ED}-\frac{1}{\sqrt{2}}N_{EB}+P=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \ -\frac{1}{\sqrt{2}}N_{EB}-P=0$$

$$N_{ED}=2P, \quad N_{EB}=-\sqrt{2}P$$

節点 D における力の釣合いより

$$\sum X=0 \quad : \ -N_{DC}+2P=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \ N_{DB}=0$$

$$N_{DC}=2P, \quad N_{DB}=0$$

節点 C における力の釣合いより

$$\sum X=0 \quad : \ \frac{1}{\sqrt{2}}N_{CB}+2P=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \ -\frac{1}{\sqrt{2}}N_{CB}-N_{CA}=0$$

$$N_{CB}=-2\sqrt{2}P, \quad N_{CA}=2P$$

節点 B における力の釣合いより

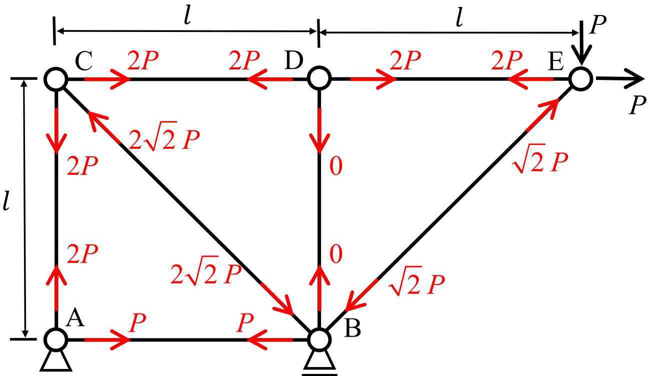
$$\sum X=0 \quad : \ -N_{BA}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}P-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}P=0$$

$$\sum Y=0 \quad : \ V_B-\frac{1}{\sqrt{2}}\times 2\sqrt{2}P-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}P=0$$

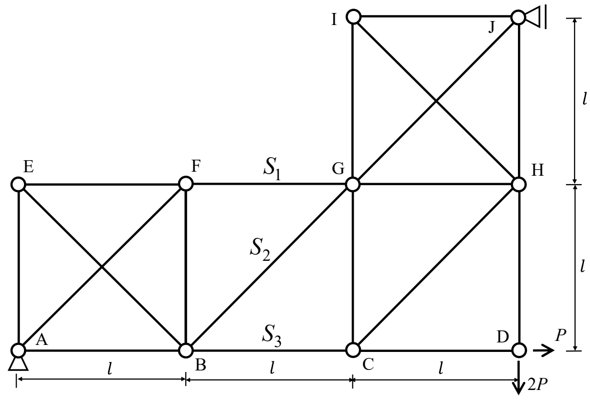
$$N_{BA}=P, \quad V_B=3P$$

また、支点反力を先に求め、節点 A における力の釣合いを考えてもよい。

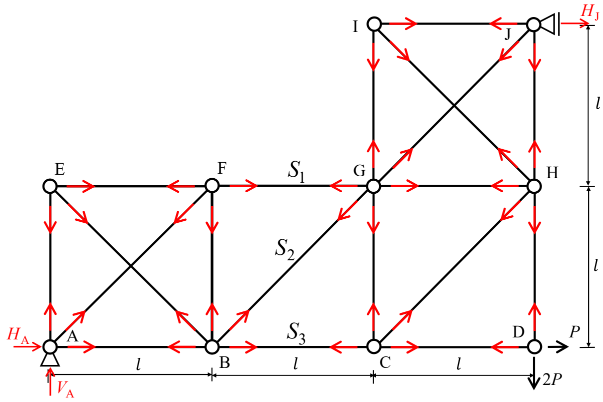
$H_A=-P, V_A=-2P, V_B=3P$



１８．１７の図(b)に示すトラスの部材力 S_1, S_2, S_3 を切断法を用いて求めよ。



(b)



全体の釣合いより、支点反力を求める。

$$\sum \mathrm{X} = 0 \quad : \ H_{\mathrm{A}} + H_{\mathrm{J}} + P = 0$$

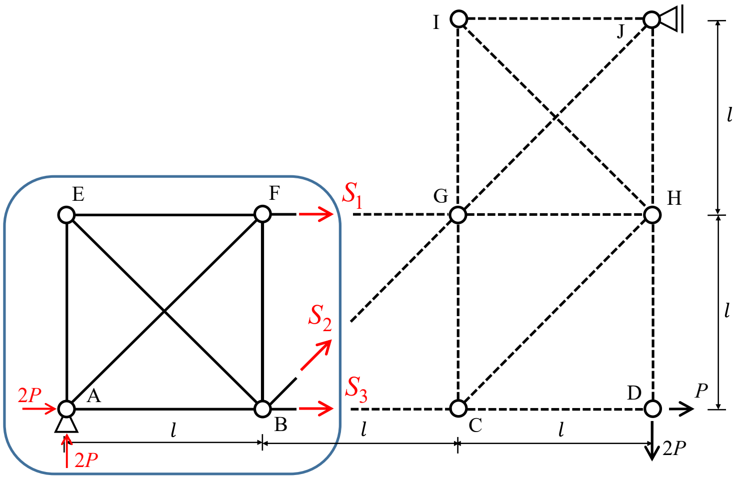
$$\sum \mathrm{Y} = 0 \quad : \ V_{\mathrm{A}} - 2P = 0$$

$$\sum{}_{\mathrm{A}} \mathrm{M} = 0 \ : \ H_{\mathrm{J}} \times 2l + 2P \times 3l = 0$$

これらを連立式させて

$$H_{\mathrm{A}} = 2P, V_{\mathrm{A}} = 2P \,, H_{\mathrm{J}} = -3P$$

切断面より左側の自由体を考え、その釣合いより



$$\sum \mathrm{X} = 0 \quad : \ S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_2 + S_3 + 2P = 0$$

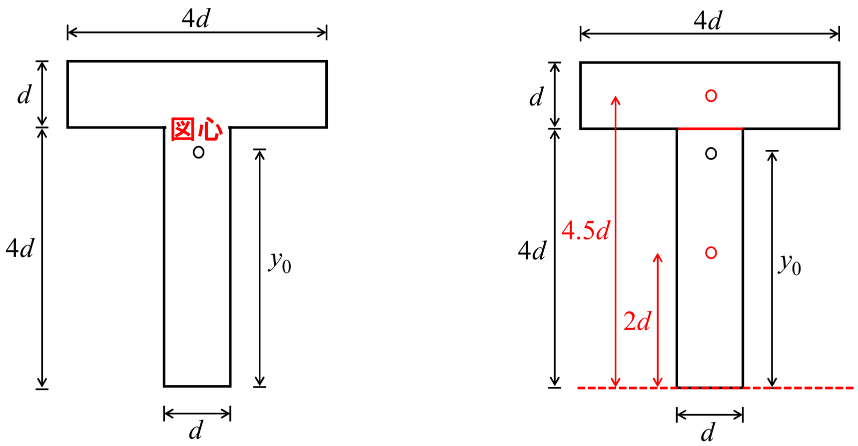
$$\sum \mathrm{Y} = 0 \quad : \ \frac{1}{\sqrt{2}} S_2 + 2P = 0$$

$$\sum{}_{\mathrm{B}} \mathrm{M} = 0 \ : \ S_1 \times l + 2P \times l = 0$$

これらを連立させて

$$S_1 = -2P, \ S_2 = -2\sqrt{2}P, \ S_3 = 2P$$

１９．（１）以下の図(a), (b)の下端から図心までの距離 y_0 を求めよ。

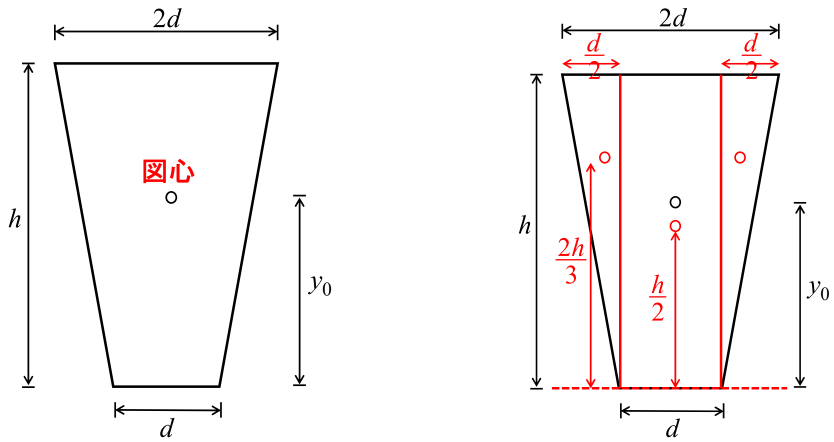


(a)

T 形断面をフランジ部（上方）とウェブ部（下方）に分割し、下端に沿う軸回りの断面 1 次モーメントの和を全断面積 $8d^2$ で除すことにより y_0 を求める。ここで、長方形断面の図心はその中央に存在することを用いる。

$$4d \times d \times 4.5d + d \times 4d \times 2d = (4d \times d + d \times 4d) \times y_0$$

$$y_0 = \frac{4d \times d \times 4.5d + d \times 4d \times 2d}{4d \times d + d \times 4d} = \frac{26d^3}{8d^2} = \frac{13}{4}d$$



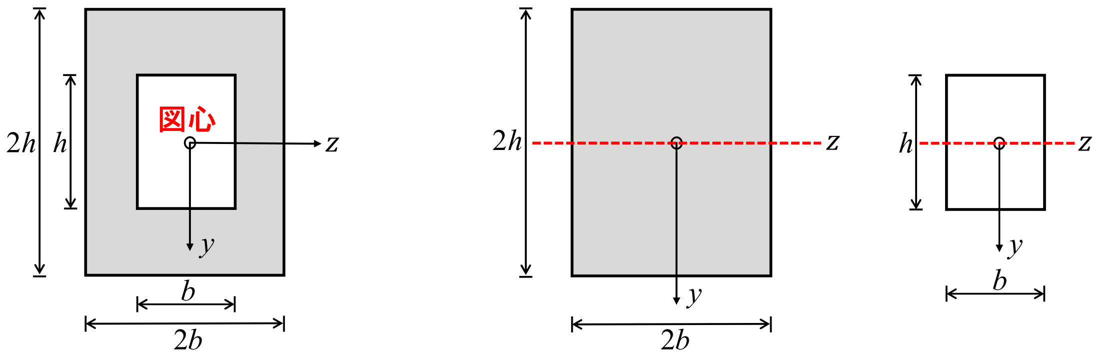
(b)

下辺の中心と上辺の中心は同一鉛直線上に存在するとする。台形断面を幅 d の長方形部分とそれに接する 2 つの三角形に分割し、それぞれの断面の下端に沿う軸まわりの各断面 1 次モーメントの和を全断面積(3/2)dh で除すことにより y_0 を求める。ここで三角形断面の図心は底辺から高さの 1/3 に存在することを用いる。

$$d \times h \times \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{d}{2} \times h \times \frac{2h}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{d}{2} \times h \times \frac{2h}{3} = (d \times h + \frac{1}{2} \times d \times h + \frac{1}{2} \times d \times h) \times y_0$$

$$y_0 = \frac{d \times h \times \frac{h}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times d \times h \times \frac{1}{2} \times \frac{2h}{3}}{d \times h + \frac{1}{2} \times d \times h} = \frac{\frac{5dh^2}{6}}{\frac{3dh}{2}} = \frac{5}{9}h$$

（２）図(c)の図心を通る z 軸回りの断面 2 次モーメントを求めよ。

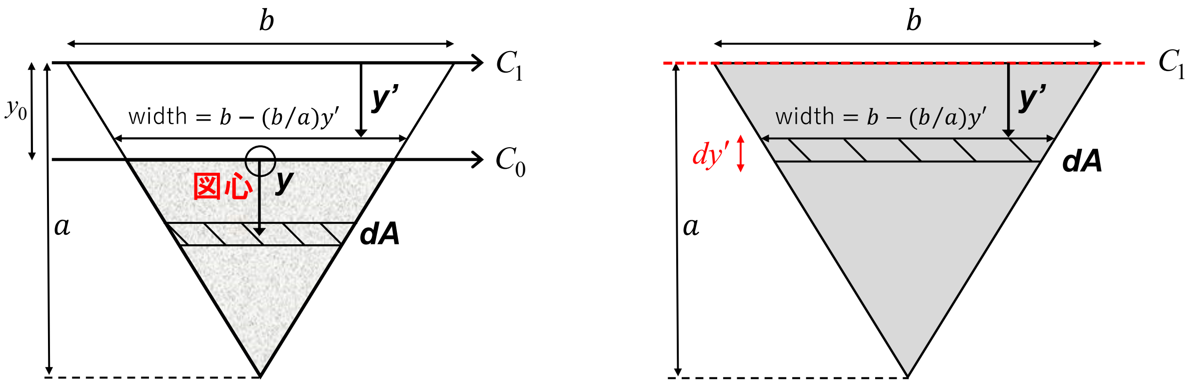


(c)

外形の長方形断面の断面 2 次モーメントから中空部分の断面 2 次モーメントを差し引く。

$$I = \frac{2b \times (2h)^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12} = \frac{5}{4}bh^3$$

（３）図(d)の上端に沿う C_1 軸回りの断面 2 次モーメント I_{C_1} と図心を通る C_0 軸回りの断面 2 次モーメント I_{C_0} を求めよ。図(d)は本文 19 項の図３(b)と同じである。



(d)

本文 19 項の(2)式と同様の定式化を用いて、C_1 軸回りの断面 2 次モーメントを求める。

$$I_{C_1} = \int_0^a y'^2 (b - \frac{b}{a}y')dy' = \left[\frac{b}{3}y'^3 - \frac{b}{4a}y'^4\right]_0^a = \frac{1}{12}ba^3$$

座標軸の平行移動の公式（平行軸の定理）より次式が成り立つ。

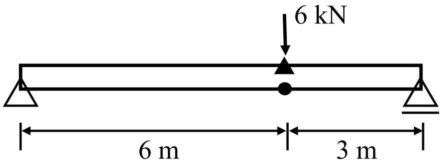
$$I_{C_1} = I_{C_0} + \frac{1}{2} \times b \times a \times {y_0}^2$$

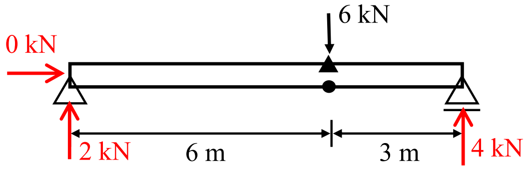
式変形より C_0 軸回りの断面 2 次モーメントを求める。なお y_0 は三角形断面の図心より $a/3$ である。

$$I_{C_0} = I_{C_1} - \frac{1}{2} \times b \times a \times {y_0}^2 = \frac{ba^3}{12} - \frac{ba}{2} \times \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}ba^3$$

２０．以下に示す長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）を有する単純梁と片持梁について、●と▲印の点（断面の上下縁）における垂直応力を求めよ。

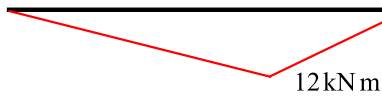
（1）





本単純梁の N 図および M 図は以下の通り

N図



M図

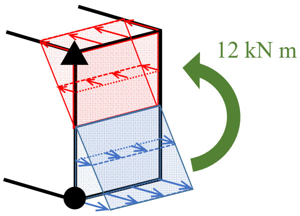
断面力図より、●と▲印の点における垂直応力は、曲げモーメント 12 kNm のみが作用していることを考慮して、本文 20 項の(1)式より

$$\sigma_{\text{上下縁}} = \pm \frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = \pm \frac{M}{Z}$$

長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）の断面 2 次モーメント I および断面係数 Z は次式の通り。

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0.6 \times 1^3}{12} = \frac{1}{20}\,\mathrm{m}^4 \quad , \quad Z = I \times \frac{2}{h} = \frac{1}{20} \times \frac{2}{1} = \frac{1}{10}\,\mathrm{m}^3$$

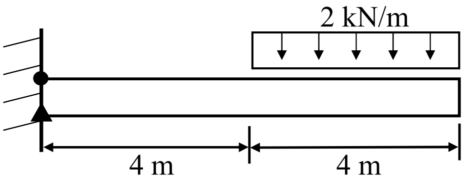
これより

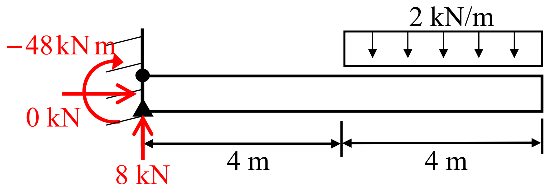


$$\sigma_{●} = \frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = \frac{M}{Z} = \frac{12}{0.1} = 120\,\mathrm{kN/m^2}$$

$$\sigma_{▲} = -\frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = -\frac{M}{Z} = -\frac{12}{0.1} = -120\,\mathrm{kN/m^2}$$

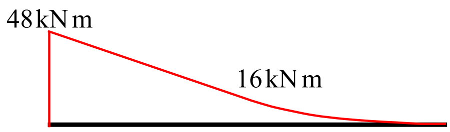
（2）





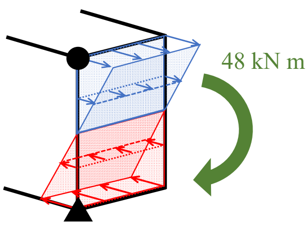
本片持梁の N 図および M 図は以下の通り

N図



M図

断面力図より、●と▲印の点における垂直応力は、曲げモーメント 48 kNm のみが作用していることを考慮して、

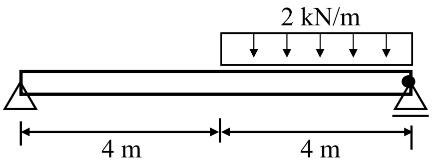


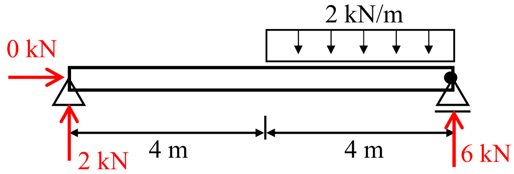
$$\sigma_{●} = \frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = \frac{M}{Z} = \frac{48}{0.1} = 480\,\mathrm{kN/m^2}$$

$$\sigma_{▲} = -\frac{M}{I} \times \frac{h}{2} = -\frac{M}{Z} = -\frac{48}{0.1} = -480\,\mathrm{kN/m^2}$$

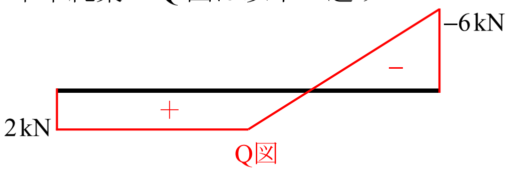
２１．以下に示す長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）を有する単純梁と片持梁について、●印の点（断面の図心）におけるせん断応力を求めよ。

（1）





本単純梁の Q 図は以下の通り



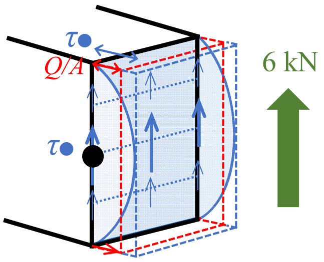
●印の点は断面中央であるため、せん断応力は最大せん断応力となる。●印の点における最大せん断応力を求める。21 項より長方形断面において、最大せん断応力は平均せん断応力 Q/A の 1.5 倍である。

$$\tau_{\max} = 1.5 \times \frac{Q}{A}$$　（●印の点におけるせん断力 Q は Q 図より 6 kN）

長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）であることより断面積 A は次の通り。

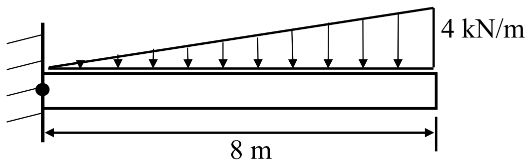
$$A = 0.6 \times 1 = 0.6\,\mathrm{m}^2$$

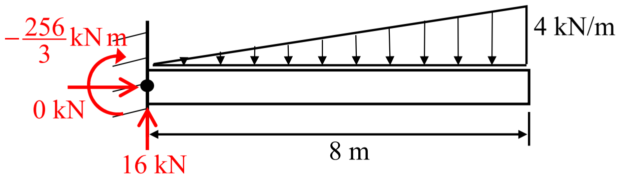
これより



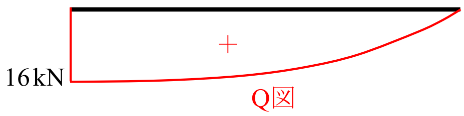
$$\tau_{\bullet} = 1.5 \times \frac{Q}{A} = 1.5 \times \frac{6}{0.6} = 15\,\mathrm{kN/m^2}$$

（2）

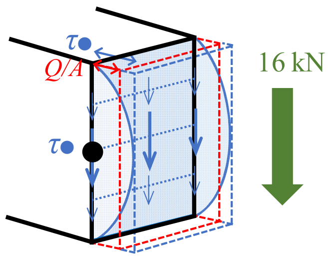




本片持梁の Q 図は以下の通り



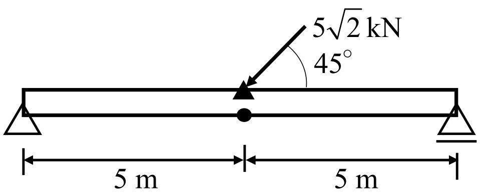
●印の点におけるせん断力 Q は Q 図より 16 kN である。これより

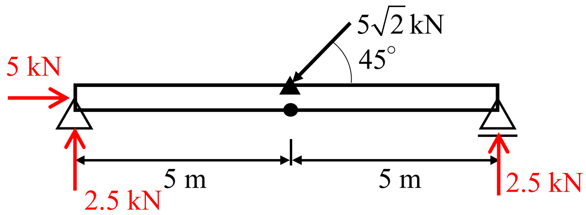


$$\tau_{\bullet} = 1.5 \times \frac{Q}{A} = 1.5 \times \frac{16}{0.6} = 40\,\mathrm{kN/m^2}$$

２２．以下に示す長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）を有する単純梁と片持梁について、●と▲印の点（断面の上下縁）における垂直応力を求めよ。

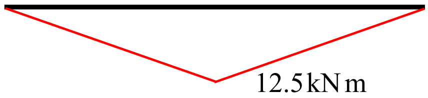
（１）





本単純梁の N 図および M 図は以下の通り

N図



M図

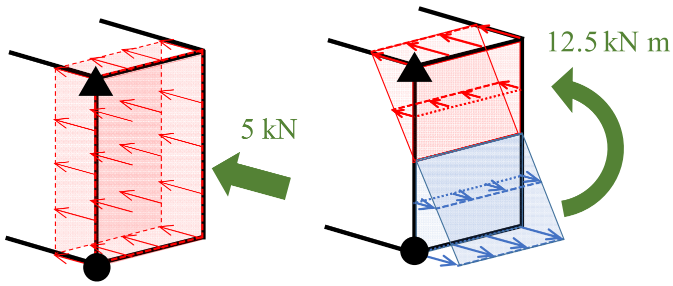
断面力図より、●と▲印の点の断面には、軸方向力−5 kN と曲げモーメント 12 kNm が作用している。22 項の(1)式より

$$\sigma_{\text{上下縁}}=\pm\frac{M}{I}\times\frac{h}{2}+\frac{N}{A}=\pm\frac{M}{Z}+\frac{N}{A}$$

長方形断面（幅 b=0.6m, せい h=1.0m）より、断面積 A および断面係数 Z は次の通り。

$$A=0.6\times1=0.6\,\mathrm{m}^2,\quad Z=I\times\frac{2}{h}=\frac{bh^2}{6}=\frac{0.6\times1^2}{6}=\frac{1}{10}\,\mathrm{m}^3$$

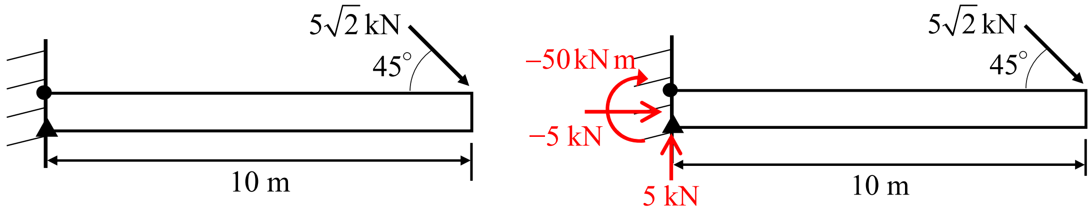
これより



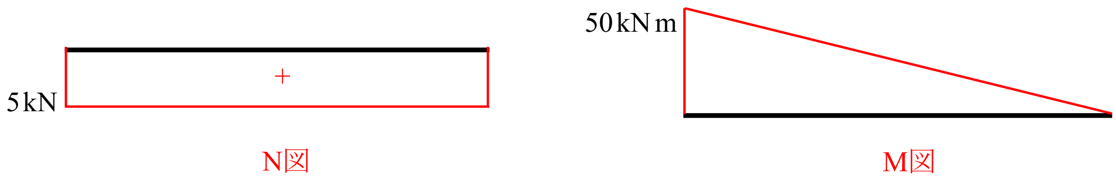
$$\sigma_{\bullet}=\frac{M}{Z}-\frac{N}{A}=\frac{12.5}{0.1}-\frac{5}{0.6}=125-8.3=116.7\,\mathrm{kN/m^2}$$

$$\sigma_{\blacktriangle}=-\frac{M}{Z}-\frac{N}{A}=-\frac{12.5}{0.1}-\frac{5}{0.6}=-125-8.3=-133.3\,\mathrm{kN/m^2}$$

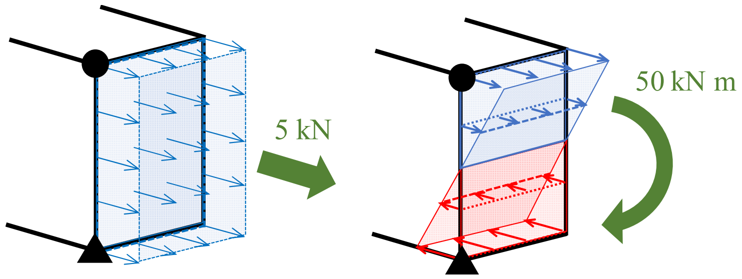
（２）



本片持梁の N 図および M 図は以下の通り



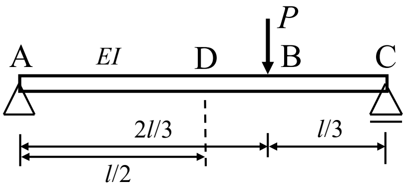
断面力図より、●と▲印の点の断面には、軸方向力 5 kN と曲げモーメント 50 kNm が作用している。これより



$$\sigma_{\bullet} = \frac{M}{Z} + \frac{N}{A} = \frac{50}{0.1} + \frac{5}{0.6} = 500 + 8.3 = 508.3\,\mathrm{kN/m^2}$$

$$\sigma_{\blacktriangle} = -\frac{M}{Z} + \frac{N}{A} = -\frac{50}{0.1} + \frac{5}{0.6} = -500 + 8.3 = -491.7\,\mathrm{kN/m^2}$$

２３．以下に示す曲げ剛性 EI の単純梁について、モールの定理を用いて両端 A, C でのたわみ角と D, B 点でのたわみを求めよ。



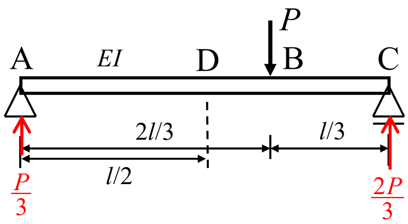


図 1 原問題の支点反力

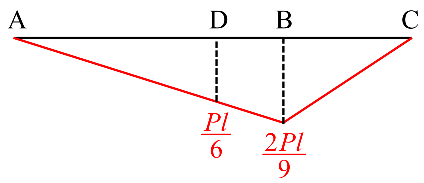


図 2 原問題の M 図

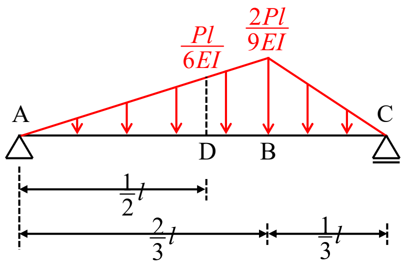


図 3 モールの定理の適用

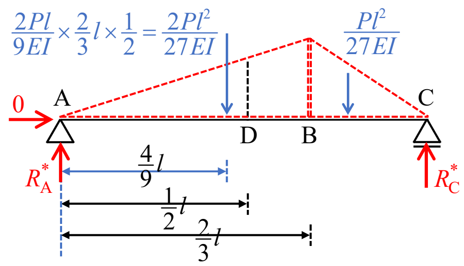


図 4 弾性荷重および支点反力

モールの定理より、原問題の M 図を用いて、三角形分布の弾性荷重が作用する単純梁を考える。左右の支持点におけるせん断力 Q_A^*、Q_C^* から、左右端におけるたわみ角 θ_A、θ_C が求められる。
全体の釣合いより

$$\sum{}_A M=0 \ : \ -R_C^* \times l+\frac{2Pl^2}{27EI}\times\frac{4}{9}l+\frac{Pl^2}{27EI}\times\frac{7}{9}l=0 \quad \rightarrow \quad R_C^*=\frac{5Pl^2}{81EI}=Q_C^*=\theta_C$$

$$\sum{}_C M=0 \ : \ -R_A^* \times l+\frac{2Pl^2}{27EI}\times\left(l-\frac{4}{9}l\right)+\frac{Pl}{27EI}\times\left(l-\frac{7}{9}l\right)=0 \quad \rightarrow \quad R_A^*=\frac{4Pl^2}{81EI}=Q_A^*=\theta_A$$

B、D 点における曲げモーメント M_B^*、M_D^* から、B、D 点におけるたわみ v_B、v_D が求められる。
自由体の釣合いより（B（or D）点より左の自由体の B（or D）点回りのモーメントの釣合い）

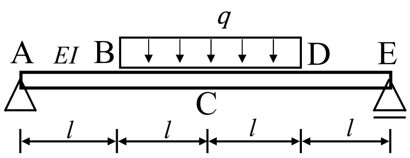
$$\sum{}_B M=0 \ : \ -M_B^*+R_A^*\times\frac{2}{3}l+\frac{2Pl^2}{27EI}\times\frac{2}{9}l=0$$

$$M_B^*=\frac{4Pl^2}{81EI}\times\frac{2}{3}l+\frac{2Pl^2}{27EI}\times\frac{2}{9}l=\frac{Pl^3}{EI}\left(\frac{4}{81}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{27}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{4Pl^3}{243EI}=v_B$$

$$\sum{}_D M=0 \ : \ -M_D^*+R_A^*\times\frac{1}{2}l-\left(\frac{Pl}{6EI}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}l\times\frac{1}{3}\right)=0$$

$$M_D^*=\frac{5Pl^2}{81EI}\times\frac{1}{2}l-\frac{Pl^2}{24EI}\times\frac{1}{6}l=\frac{Pl^3}{EI}\left(\frac{4}{81}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{24}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{23Pl^3}{1296EI}=v_D$$

２４．以下に示す曲げ剛性 EI の単純梁について、モールの定理を用いて A 端でのたわみ角と C 点でのたわみを求めよ。



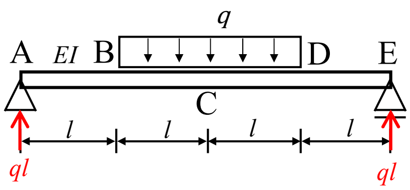


図 1 原問題の支点反力

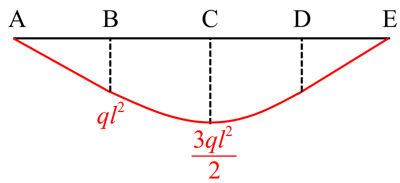


図 2 原問題の M 図

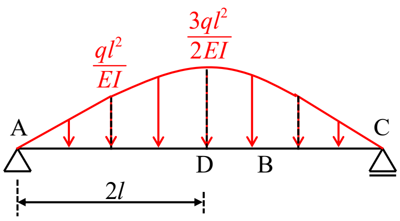


図 3 モールの定理の適用

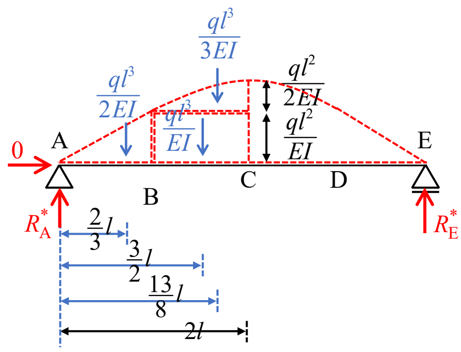


図 4 弾性荷重および支点反力

モールの定理より、原問題の M 図を用いて、分布した弾性荷重が作用する単純梁を考える。
左の支持点におけるせん断力 Q_{A}^{*} から、左端におけるたわみ角 θ_{A} が求められる。
全体の釣合いより（対称性を考慮）

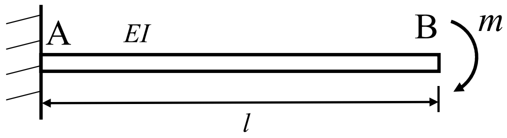
$$\sum \mathrm{Y}=0 \quad : \ -R_{\mathrm{A}}^{*}+\frac{ql^{3}}{2EI}+\frac{ql^{3}}{EI}+\frac{ql^{3}}{3EI}=0 \qquad\qquad R_{\mathrm{A}}^{*}=\frac{11ql^{3}}{6EI}=Q_{\mathrm{A}}^{*}=\theta_{\mathrm{A}}$$

C 点における曲げモーメント M_{C}^{*} から、C 点におけるたわみ v_{C} が求められる。
C 点より左の自由体の釣合いより

$$\sum{}_{\mathrm{C}}\mathrm{M}=0 \quad : \ -M_{\mathrm{C}}^{*}+R_{\mathrm{A}}^{*}\times 2l+\frac{ql^{3}}{2EI}\times\left(2l-\frac{2}{3}l\right)+\frac{ql^{3}}{EI}\times\left(2l-\frac{3}{2}l\right)+\frac{ql^{3}}{3EI}\times\left(2l-\frac{13}{8}l\right)=0$$

$$M_{\mathrm{C}}^{*}=\frac{11ql^{3}}{6EI}\times 2l+\frac{ql^{3}}{2EI}\times\frac{4}{3}l+\frac{ql^{3}}{EI}\times\frac{1}{2}l+\frac{ql^{3}}{3EI}\times\frac{3}{8}l=\frac{ql^{4}}{EI}\left(\frac{11}{6}\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\right)=\frac{19ql^{4}}{8EI}=v_{\mathrm{C}}$$

２５．以下に示す曲げ剛性 EI の片持梁について、モールの定理を用いて B 点でのたわみ角とたわみを求めよ。



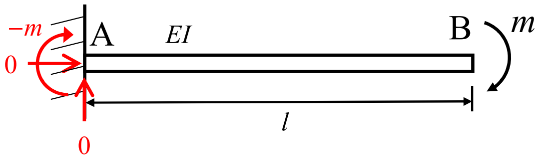


図 1 原問題の支点反力

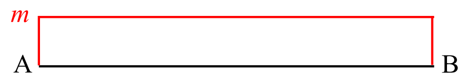


図 2 原問題の M 図

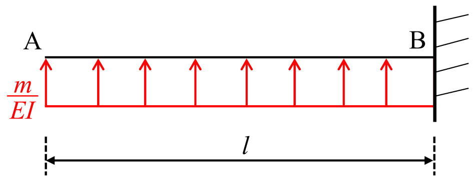


図 3 モールの定理の適用

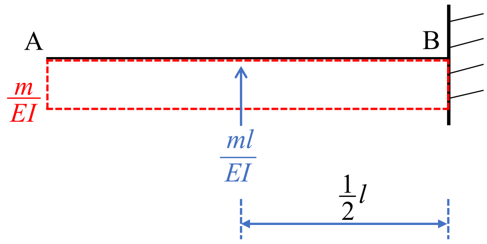


図 4 弾性荷重ついて

片持梁に対するモールの定理において、固定端と自由端を入れ替えた片持梁に、原問題の M 図より求まる弾性荷重が作用すると考える。

B 点におけるせん断力 Q_B^* から、右端におけるたわみ角 θ_B が求められる。

自由体の鉛直方向の釣合いより

$$\sum Y = 0 \quad : \ -Q_B^* + \frac{ml}{EI} = 0$$

したがって、

$$Q_B^* = \frac{ml}{EI} = \theta_B$$

B 点における曲げモーメント M_B^* から、B 点におけるたわみ v_B が求められる。

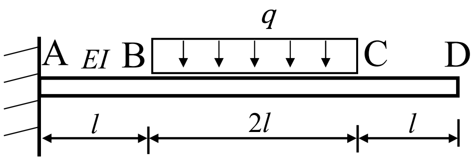
自由体の B 点回りのモーメントの釣合いより

$$\sum {}_B M = 0 \ : \ -M_B^* + \frac{ml}{EI} \times \frac{1}{2} l = 0$$

したがって、

$$M_B^* = \frac{ml^2}{2EI} = v_B$$

２６．以下に示す曲げ剛性 EI の片持梁について、モールの定理を用いて D 端でのたわみ角とたわみを求めよ。



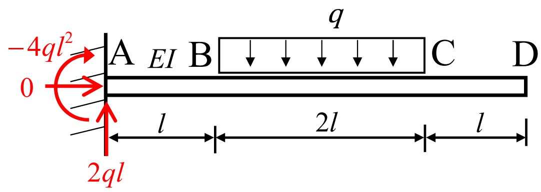


図 1 原問題の支点反力

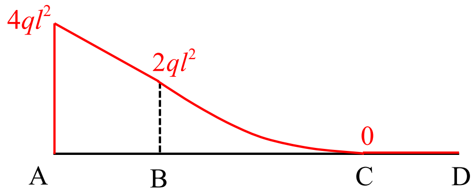


図 2 原問題の M 図

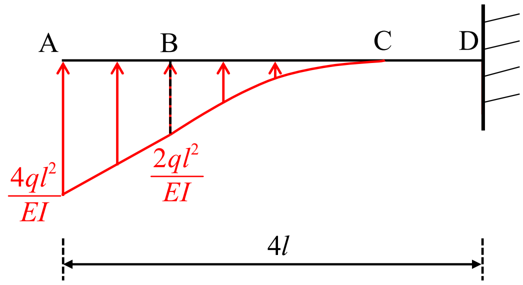


図 3 モールの定理の適用

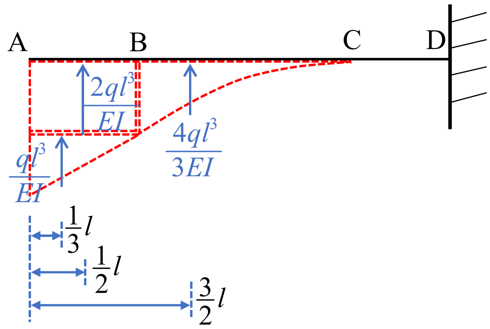


図 4 弾性荷重について

片持梁に対するモールの定理において、固定端と自由端を入れ替えた片持梁に、原問題の M 図より求まる弾性荷重が作用すると考える。

D 点におけるせん断力 Q_D^* から、右端におけるたわみ角 θ_D が求められる。

自由体の鉛直方向の釣合いより

$$\sum \mathrm{Y}=0 \quad : \ -Q_D^*+\frac{ql^3}{EI}+\frac{2ql^3}{EI}+\frac{4ql^3}{3EI}=0$$

したがって、

$$Q_D^*=\frac{13ql^3}{3EI}=\theta_D$$

D 点における曲げモーメント M_D^* から、D 点におけるたわみ v_D が求められる。

自由体の D 点回りのモーメントの釣合いより

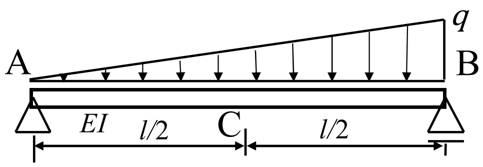
$$\sum{}_{\mathrm{D}}\mathrm{M}=0 \quad : \ -M_D^*+\frac{ql^3}{EI}\times\left(4l-\frac{1}{3}l\right)+\frac{2ql^3}{EI}\times\left(4l-\frac{1}{2}l\right)+\frac{4ql^3}{3EI}\times\left(4l-\frac{3}{2}l\right)=0$$

したがって、

$$M_D^*=\frac{ql^3}{EI}\times\frac{11}{3}l+\frac{2ql^3}{EI}\times\frac{7}{2}l+\frac{4ql^3}{3EI}\times\frac{5}{2}l=\frac{ql^3}{EI}\left(\frac{11}{3}l+2\times\frac{7}{2}l+\frac{4}{3}\times\frac{5}{2}l\right)=\frac{14ql^4}{EI}=v_D$$

２７．たわみ曲線の微分方程式 $M=-EIv''$ を積分する方法を用いて、以下の単純梁と片持梁のたわみ角およびたわみを求めよ。

（１）両端でのたわみ角とＣ点でのたわみ



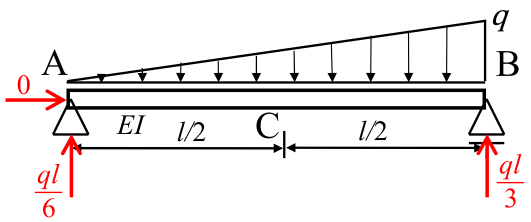


図 1 支点反力

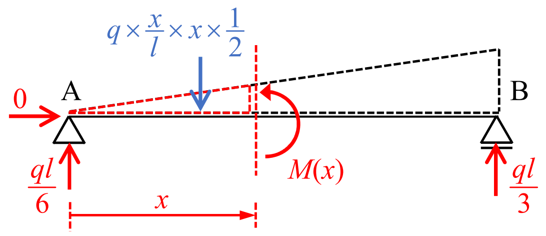


図 2 曲げモーメント

x の点における曲げモーメント $M(x)$ について求める。

自由体の釣合いより

$$\sum{}_x \mathrm{M}=0 \quad : \quad -M(x)-\left(q\times\frac{x}{l}\times x\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{x}{3}+\frac{ql}{6}\times x=0 \quad \rightarrow \quad M(x)=\frac{ql}{6}x-\frac{q}{6l}x^3$$

本文 27 項の(1)式について、本問題の曲げモーメント分布を代入し、逐次積分すると

$$EIv''(x)=-M(x)$$

$$EIv''(x)=-\left(\frac{ql}{6}x-\frac{q}{6l}x^3\right)$$

$$EIv'(x)=-\frac{ql}{12}x^2+\frac{q}{24l}x^4+C_1$$

$$EIv(x)=-\frac{ql}{36}x^3+\frac{q}{120l}x^5+C_1x+C_2$$

$v(0)=0$ より $C_2=0$

$v(0)=0$ より $C_1=\dfrac{7}{360}ql^3$

従って

$$v(x)=\frac{1}{EI}\left(-\frac{ql}{36}x^3+\frac{q}{120l}x^5+\frac{7}{360}ql^3x\right)$$

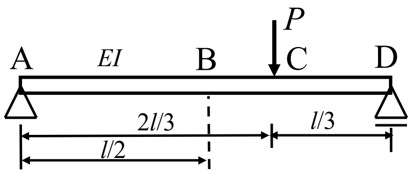
これより、両端におけるたわみ角 $v'(0)$、 $v'(l)$ および中央におけるたわみ $v(\frac{l}{2})$ は以下のとおり。

$$v'(0)=\frac{7ql^3}{360EI}$$

$$v'(l)=-\frac{ql^3}{45EI}$$

$$v(\tfrac{l}{2})=\left(-\frac{ql}{36}\left(\frac{l}{2}\right)^3+\frac{q}{120l}\left(\frac{l}{2}\right)^5+\frac{7}{360}ql^3\left(\frac{l}{2}\right)\right)=\frac{5ql^4}{768EI}$$

（２）両端でのたわみ角と、中央点、荷重作用点でのたわみ角およびたわみ



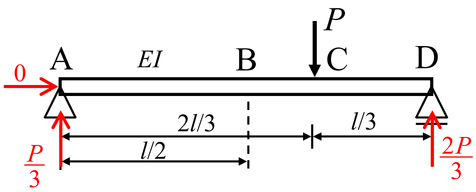


図 1 支点反力

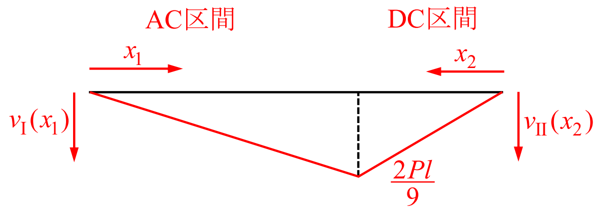


図 2　M 図

境界条件が適用しやすいように図 2 のように座標を設定する。

AC 区間について

$$v_{\mathrm{I}}''(x_1) = -\frac{M_{\mathrm{I}}(x_1)}{EI} = -\frac{P}{3EI}x_1$$

$$v_{\mathrm{I}}'(x_1) = -\frac{P}{6EI}x_1^{\ 2} + C_1$$

$$v_{\mathrm{I}}(x_1) = -\frac{P}{18EI}x_1^{\ 3} + C_1 x_1 + C_2$$

$v_{\mathrm{I}}(0) = 0$ より $C_2 = 0$

DC 区間について

$$v_{\mathrm{II}}''(x_2) = -\frac{M_{\mathrm{II}}(x_2)}{EI} = -\frac{2P}{3EI}x_2$$

$$v_{\mathrm{II}}'(x_2) = -\frac{P}{3EI}x_2^{\ 2} + C_3$$

$$v_{\mathrm{II}}(x_2) = -\frac{P}{9EI}x_2^{\ 3} + C_3 x_2 + C_4$$

$v_{\mathrm{II}}(0) = 0$ より $C_4 = 0$

接続条件より

$$v_{\mathrm{I}}(\tfrac{2}{3}l) = v_{\mathrm{II}}(\tfrac{1}{3}l) \quad \to \quad -\frac{P}{18EI}\left(\frac{2}{3}l\right)^3 + C_1\frac{2}{3}l = -\frac{P}{9EI}\left(\frac{1}{3}l\right)^3 + C_3\frac{1}{3}l \qquad (1)$$

接続条件より

$$v_{\mathrm{I}}'(\tfrac{2}{3}l) = -v_{\mathrm{II}}'(\tfrac{1}{3}l) \quad \to \quad -\frac{P}{6EI}\left(\frac{2}{3}l\right)^2 + C_1 = -\left(-\frac{P}{3EI}\left(\frac{1}{3}l\right)^2 + C_3\right) \qquad (2)$$

(1)、(2)より

両端におけるたわみ角　$C_1 = \dfrac{4Pl^2}{81EI} = v_{\mathrm{I}}'(0)$ 、$C_3 = \dfrac{5Pl^2}{81EI} = v_{\mathrm{II}}'(0)$

中央点におけるたわみ角およびたわみ　$v_{\mathrm{I}}'(\tfrac{l}{2}) = \dfrac{5Pl^2}{648EI}$、$v_{\mathrm{I}}(\tfrac{l}{2}) = \dfrac{23Pl^3}{1296EI}$

荷重作用点におけるたわみ角およびたわみ　$v_{\mathrm{I}}'(\tfrac{2}{3}l) = -\dfrac{2Pl^2}{81EI}$、$v_{\mathrm{I}}(\tfrac{2}{3}l) = \dfrac{4Pl^3}{243EI}$

（3）先端におけるたわみ角とたわみ

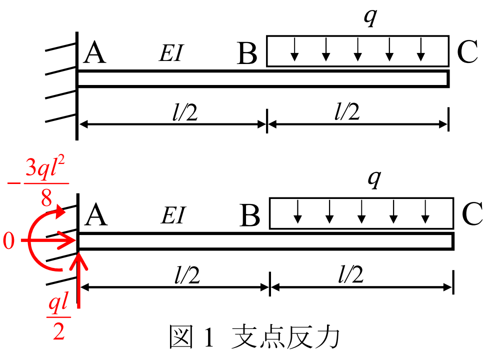


図 1 支点反力

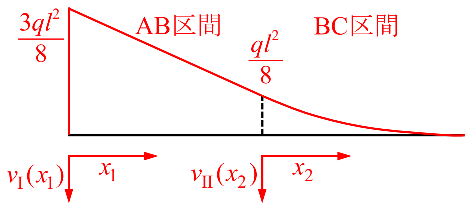


図 2 M 図

境界条件が適用しやすいように図 2 のように座標を設定する。

AB 区間について

$$M_{\mathrm{I}}(x_1)=-\frac{3ql^2}{8}+\frac{ql}{2}x_1$$

$$EIv_{\mathrm{I}}''(x_1)=-\left(-\frac{3ql^2}{8}+\frac{ql}{2}x_1\right)$$

$$EIv_{\mathrm{I}}'(x_1)=\frac{3ql^2}{8}x_1-\frac{ql}{4}x_1{}^2+C_1$$

$$EIv_{\mathrm{I}}(x_1)=\frac{3ql^2}{16}x_1{}^2-\frac{ql}{12}x_1{}^3+C_1x_1+C_2$$

$v_{\mathrm{I}}(0)=v_{\mathrm{I}}'(0)=0$ より $C_1=0$、$C_2=0$

$$v_{\mathrm{I}}(x_1)=\frac{3ql^2}{16EI}x_1{}^2-\frac{ql}{12EI}x_1{}^3$$

BC 区間について

$$M_{\mathrm{II}}(x_2)=-\frac{ql^2}{8}+\frac{ql}{2}x_2-\frac{q}{2}x_2{}^2$$

$$EIv_{\mathrm{II}}''(x_2)=-\left(-\frac{ql^2}{8}+\frac{ql}{2}x_2-\frac{q}{2}x_2{}^2\right)$$

$$EIv_{\mathrm{II}}'(x_2)=\frac{ql^2}{8}x_2-\frac{ql}{4}x_2{}^2+\frac{q}{6}x_2{}^3+C_3$$

$$EIv_{\mathrm{II}}(x_2)=\frac{ql^2}{16}x_2{}^2-\frac{ql}{12}x_2{}^3+\frac{q}{24}x_2{}^4+C_3x_2+C_4$$

接続条件より

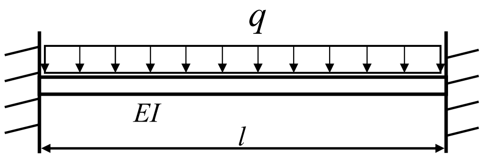
$$v_{\mathrm{I}}\left(\frac{1}{2}l\right)=v_{\mathrm{II}}(0)\ \rightarrow\ \frac{3ql^2}{16}\left(\frac{1}{2}l\right)^2-\frac{ql}{12}\left(\frac{1}{2}l\right)^3=C_4\ \rightarrow\ C_4=\frac{7ql^4}{192}$$

$$v_{\mathrm{I}}'\left(\frac{1}{2}l\right)=v_{\mathrm{II}}'(0)\ \rightarrow\ \frac{3ql^2}{8}\left(\frac{1}{2}l\right)-\frac{ql}{4}\left(\frac{1}{2}l\right)^2=C_3\ \rightarrow\ C_3=\frac{ql^3}{8}$$

先端におけるたわみ角 $v_{\mathrm{II}}'\left(\frac{1}{2}l\right)=\frac{ql^2}{8EI}\left(\frac{1}{2}l\right)-\frac{ql}{4EI}\left(\frac{1}{2}l\right)^2+\frac{q}{6EI}\left(\frac{1}{2}l\right)^3+\frac{ql^3}{8EI}=\frac{7ql^3}{48EI}$

先端におけるたわみ $v_{\mathrm{II}}\left(\frac{1}{2}l\right)=\frac{ql^2}{16EI}\left(\frac{1}{2}l\right)^2-\frac{ql}{12EI}\left(\frac{1}{2}l\right)^3+\frac{q}{24EI}\left(\frac{1}{2}l\right)^4+\frac{ql^3}{8EI}\left(\frac{1}{2}l\right)+\frac{7ql^4}{192EI}=\frac{41ql^4}{384EI}$

２８．以下の曲げ剛性 EI の両端固定梁のたわみ曲線 v を、微分方程式 $EIv'''' = q$ を積分することにより求めよ。



微分方程式 $EIv'''' = q$ を逐次積分すると

$$EIv''''(x) = q$$

$$EIv'''(x) = qx + C_1$$

$$EIv''(x) = \frac{q}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

$$EIv'(x) = \frac{q}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3$$

$$EIv(x) = \frac{q}{24}x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3 x + C_4$$

両端とも固定端であるため

$v(0) = v'(0) = 0$ より

$$C_3 = C_4 = 0$$

$v(l) = v'(l) = 0$ より

$$EIv(l) = \frac{q}{24}l^4 + \frac{1}{6}C_1 l^3 + \frac{1}{2}C_2 l^2 = 0$$

$$EIv'(l) = \frac{q}{6}l^3 + \frac{1}{2}C_1 l^2 + C_2 l = 0$$

従って

$C_1 = -\frac{1}{2}ql$ 、$C_2 = \frac{1}{12}ql^2$

たわみ曲線は次のように求められる。

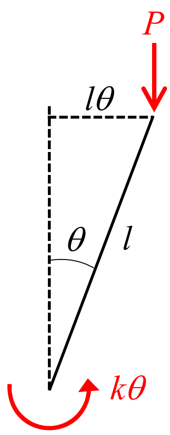
$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{12}qlx^3 + \frac{1}{24}ql^2x^2\right)$$

補足

$EIv''(0) = C_2 = \frac{1}{12}ql^2$ は左端の固定端モーメントに対応

$-EIv'''(0) = -C_1 = \frac{1}{2}ql$ は左端の鉛直支持反力に対応

２９．（１）本文 29 項の図３の回転ばねで支持された剛棒の座屈荷重を求めよ。



変形した状態におけるモーメントの釣合いより次式が得られる。

$$Pl\theta = k\theta$$

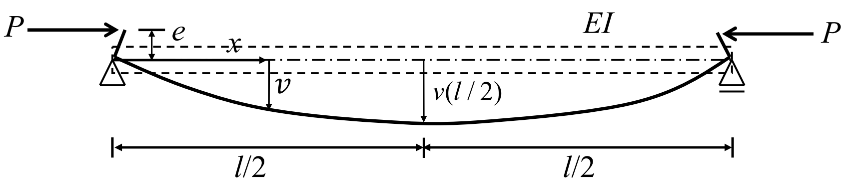
したがって、

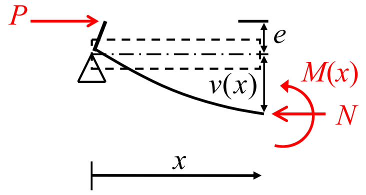
$$(Pl - k)\theta = 0$$

ここで、

$\theta \neq 0$ ならば $P_{cr} = \dfrac{k}{l}$

（２）以下に示す偏心軸力 P が作用する単純支持柱について、P と座標 x におけるたわみ v の関係を偏心距離 e を含む形式で求めよ。また、中央点でのたわみを求めよ。





上図のような変形した状態における自由体の x 点回りのモーメントの釣合いより

$$M = P\left(e + v(x)\right)$$

曲げモーメントと曲率の関係を代入して

$$EIv''(x) = -M(x) = -P\left(e + v(x)\right)$$

ここで、$k^2 = \dfrac{P}{EI}$ と置き、上式に代入すると、

$$v''(x) + k^2 v(x) = -k^2 e$$

たわみ曲線を、上式の右辺＝０の一般解 $v_H(x)$ と上式の特解 $v_P(x)$ の和 $v(x) = v_H(x) + v_P(x)$ とおく。このとき、$v_H(x)$ と $v_P(x)$ は次のように得られる。

$$v_H(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$v_P(x) = -e$$

したがって、

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

境界条件 $v(0) = v(l) = 0$ より未定係数が次のように求められる。

$$C_2 = e, \quad C_1 = \frac{e(1 - \cos kl)}{\sin kl} = e \tan \frac{kl}{2}$$

よって

$$v(x) = e(\tan \frac{kl}{2} \sin kx + \cos kx - 1) \quad \rightarrow \quad v(\frac{l}{2}) = e(\sec \frac{kl}{2} - 1)$$

$e \to 0$ でも $v(\frac{l}{2}) \to \infty$ となるためには、

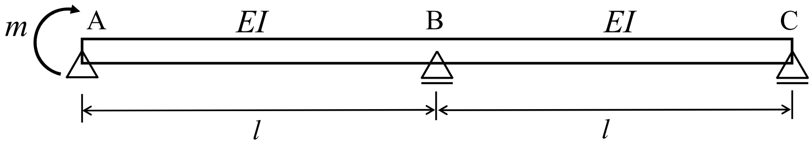
$$\sec \frac{kl}{2} \to \infty \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{\cos \frac{kl}{2}} \to \infty$$

この式が成立するには、$\dfrac{kl}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ でなければならない。すなわち、

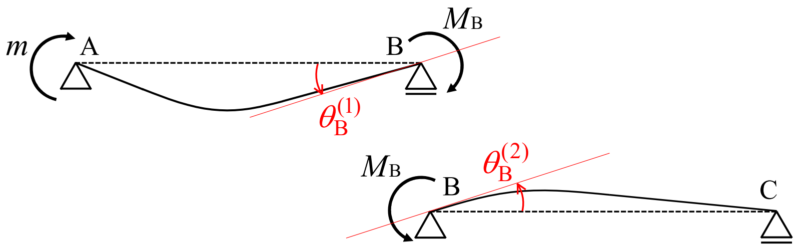
$$kl = \pi$$

これより、$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$（オイラーの座屈荷重）となる。

３１．以下の図(a)に示す連続梁を応力法を用いて解き、曲げモーメント図、せん断力図を描け。また、支点反力を求めよ。



(a)



B 点における曲げモーメント M_B を不静定モーメントとして考える。

単純梁 AB の B 点におけるたわみ角を $\theta_B^{(1)}$ とすると、重ね合わせの原理より

$$\theta_B^{(1)} = -\frac{ml}{6EI} + \frac{M_B l}{3EI}$$

単純梁 BC の B 点におけるたわみ角を $\theta_B^{(2)}$ とすると、

$$\theta_B^{(2)} = -\frac{M_B l}{3EI}$$

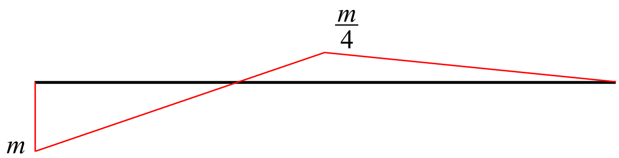
元の架構において B 点は剛接合であるため、B 点におけるたわみ角の適合条件（$\theta_B^{(1)} = \theta_B^{(2)}$）より、

$$-\frac{ml}{6EI} + \frac{M_B l}{3EI} = -\frac{M_B l}{3EI}$$

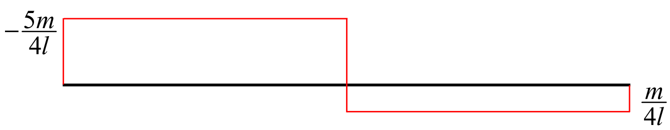
したがって、

$$M_B = \frac{m}{4}$$

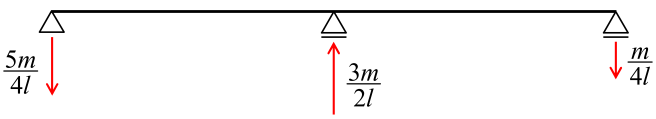
M 図、Q 図、支点反力を以下に示す。



M 図

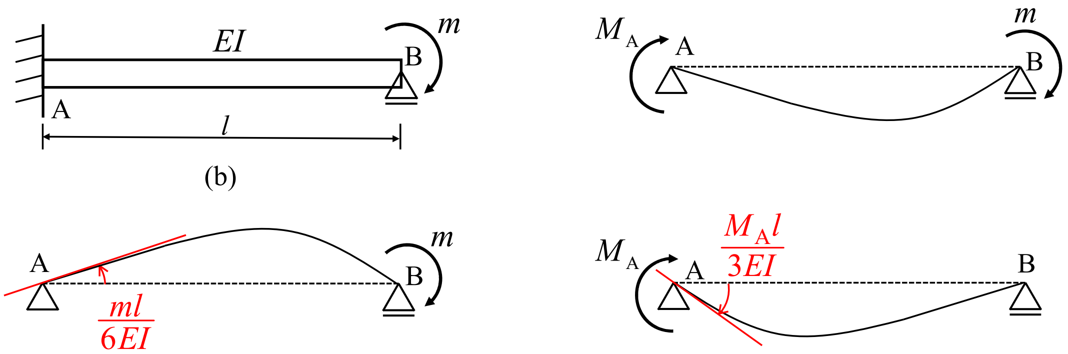


Q 図



支点反力

３２．図(b)に示す片持梁を応力法を用いて解き、曲げモーメント図、せん断力図を描け。また、支点反力を求めよ。



A 点における反力モーメント M_A を不静定モーメントとして考える。
単純梁 AB の A 点におけるたわみ角を θ_A とすると、重ね合わせの原理より

$$\theta_A = -\frac{ml}{6EI} + \frac{M_A l}{3EI}$$

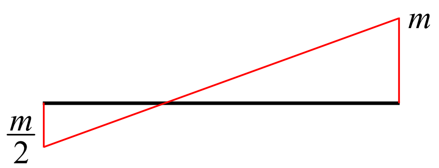
元の架構において A 点は固定端であるため、A 点におけるたわみ角の適合条件（$\theta_A = 0$）より、

$$-\frac{ml}{6EI} + \frac{M_A l}{3EI} = 0$$

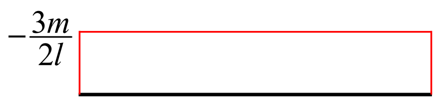
したがって、

$$M_A = \frac{m}{2}$$

M 図、Q 図、支点反力を以下に示す。



M 図

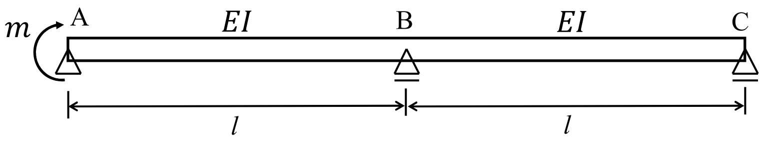


Q 図

支点反力

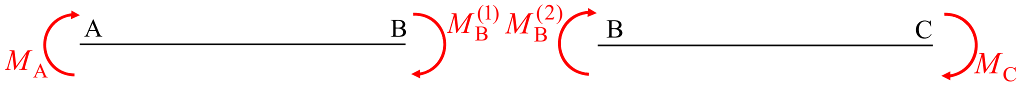
（別解）
B 点における鉛直反力を不静定力として、片持梁 AB の B 点におけるたわみを考え、B 点におけるたわみの適合条件（$v_B = 0$）より不静定力を求める。

３３．以下の図(a)に示す連続梁を変位法を用いて解け。



(a)

材端モーメントと材端回転角の関係より



$$M_A = \frac{EI}{l}\left(4\theta_A + 2\theta_B\right) \qquad M_B^{(2)} = \frac{EI}{l}\left(4\theta_B + 2\theta_C\right)$$

$$M_B^{(1)} = \frac{EI}{l}\left(2\theta_A + 4\theta_B\right) \qquad M_C = \frac{EI}{l}\left(2\theta_B + 4\theta_C\right)$$

各節点における、材端モーメントと節点モーメントの釣合いより

節点 A： $m = \frac{EI}{l}\left(4\theta_A + 2\theta_B\right)$

節点 B： $0 = \frac{EI}{l}\left(2\theta_A + 8\theta_B + 2\theta_C\right)$

節点 C： $0 = \frac{EI}{l}\left(2\theta_B + 4\theta_C\right)$

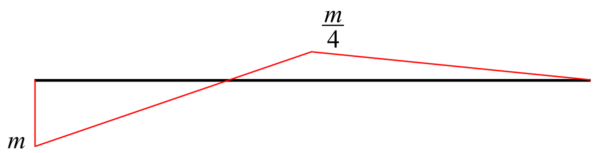
上記の連立方程式を解いて

$$\theta_A = \frac{7ml}{24EI} \qquad \theta_B = -\frac{ml}{12EI} \qquad \theta_C = \frac{ml}{24EI}$$

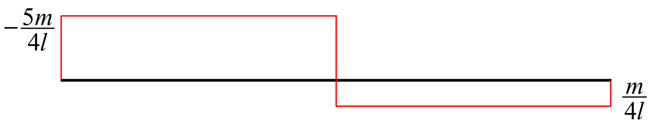
これらを元の式に代入すると、材端モーメントが求められる。

$M_A = m$、 $M_B^{(1)} = \frac{m}{4}$、 $M_B^{(2)} = -\frac{m}{4}$、 $M_C = 0$

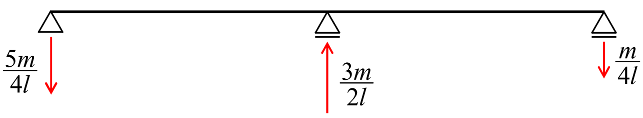
M 図、Q 図、支点反力を以下に示す。



M 図

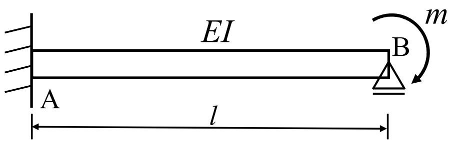


Q 図



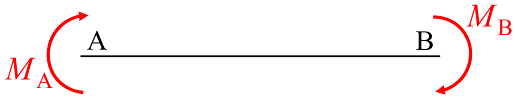
支点反力

３４．３３の図(b)に示す一端固定・他端ローラー支持の不静定梁を変位法を用いて解け。



(b)

材端モーメントと材端回転角の関係より



$$M_{\mathrm{A}} = \frac{EI}{l}\left(4\theta_{\mathrm{A}} + 2\theta_{\mathrm{B}}\right)$$

$$M_{\mathrm{B}} = \frac{EI}{l}\left(4\theta_{\mathrm{B}} + 2\theta_{\mathrm{A}}\right)$$

節点 A は固定端であるため、 $\theta_{\mathrm{A}} = 0$ である。
節点 B における材端モーメント M_{B} と節点モーメントの釣合いより

$$M_{\mathrm{B}} = \frac{EI}{l}\left(4\theta_{\mathrm{B}}\right) = m$$

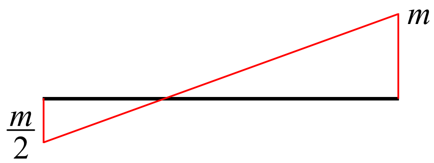
従って

$$\theta_{\mathrm{B}} = \frac{ml}{4EI}$$

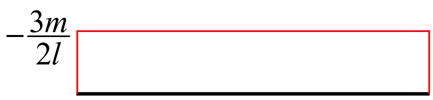
この θ_{B} と $\theta_{\mathrm{A}} = 0$ を上式の M_{A} の式に代入して次式を得る。

$$M_{\mathrm{A}} = \frac{EI}{l}\left(2\theta_{\mathrm{B}}\right) = \frac{m}{2}$$

M 図、Q 図、支点反力を以下に示す。



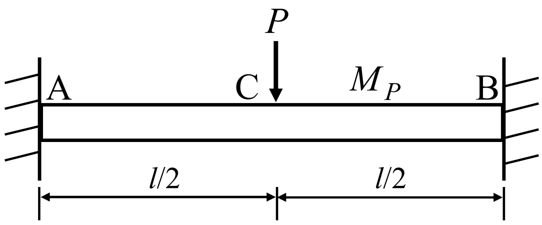
M 図



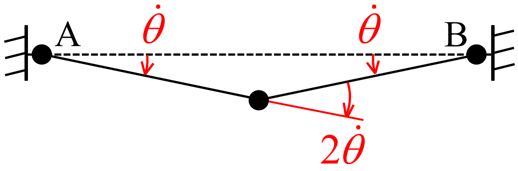
Q 図

支点反力

３５．以下の図(a)に示す両端固定梁の塑性崩壊荷重を求めよ。



(a)



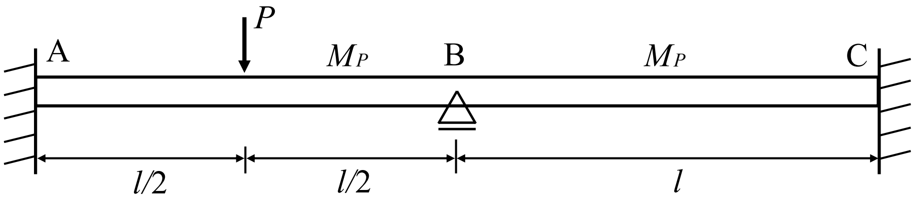
仕事速度式より

$$P\frac{l}{2}\dot{\theta} = M_P\left(\dot{\theta} + 2\dot{\theta} + \dot{\theta}\right)$$

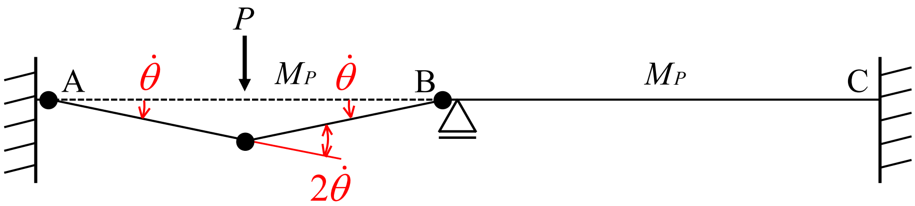
したがって塑性崩壊荷重は次のように得られる。

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{8M_P}{l}$$

３６．３５の図(b)に示す連続梁の塑性崩壊荷重を求めよ。



(b)



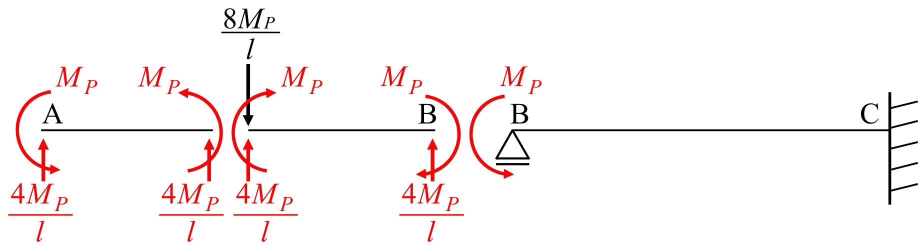
仕事速度式より

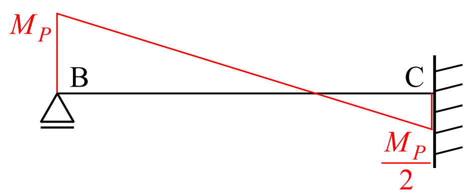
$$P\frac{l}{2}\dot{\theta}=M_P\left(\dot{\theta}+2\dot{\theta}+\dot{\theta}\right)$$

したがって、塑性崩壊荷重は次のように得られる。

$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{8M_P}{l}$$

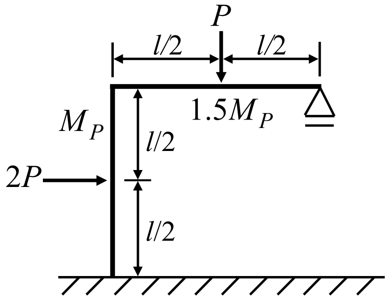
次に、塑性ヒンジ生成点における全塑性モーメントの値と自由体に対する力の釣合いを用いて降伏条件の確認を行う。



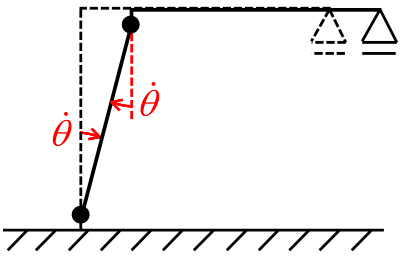


C 点の曲げモーメントは$M_C=\dfrac{M_P}{2}$であり、全塑性モーメント以下となるため降伏条件を満足する。

３７．以下に示す肘型ラーメンの塑性崩壊荷重を求めよ。



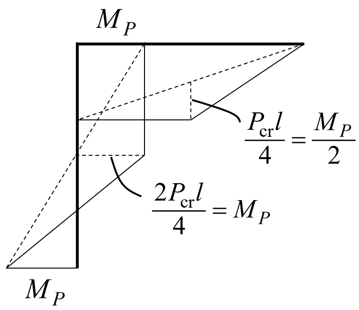
本骨組では下記に示す崩壊機構が考えられる。各崩壊機構に対する仕事速度式より、塑性崩壊荷重の候補値が得られる。

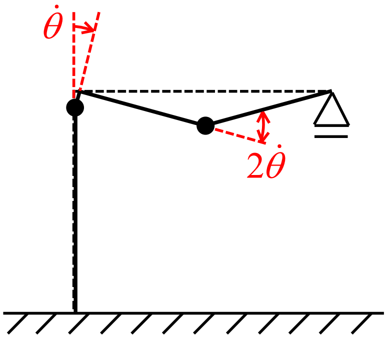


$$2P\frac{l}{2}\dot{\theta}=M_P\left(\dot{\theta}+\dot{\theta}\right)$$

したがって、

$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{2M_P}{l}$$

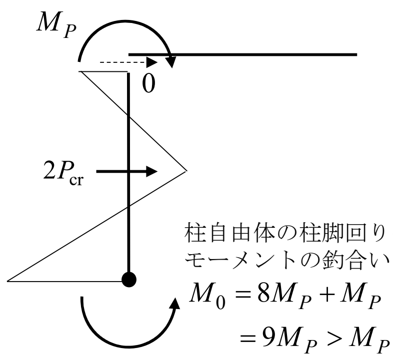


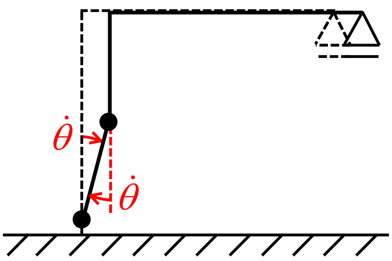


$$P\frac{l}{2}\dot{\theta}=M_P\dot{\theta}+1.5M_P\times 2\dot{\theta}$$

したがって、

$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{8M_P}{l}$$

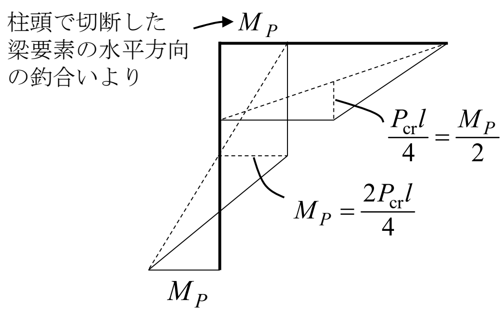




$$2P\frac{l}{2}\dot{\theta}=M_P\left(\dot{\theta}+\dot{\theta}\right)$$

したがって、

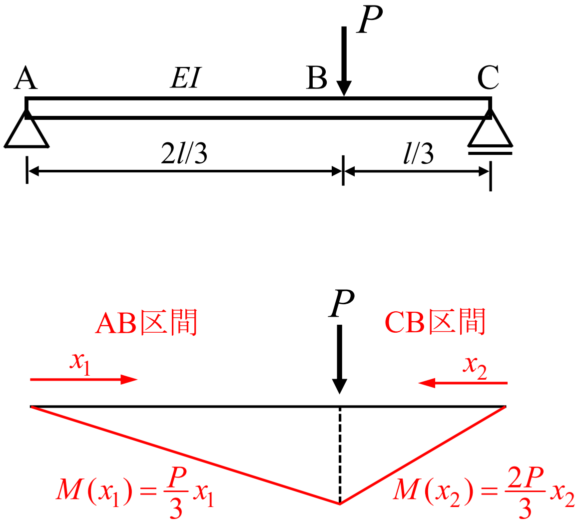
$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{2M_P}{l}$$



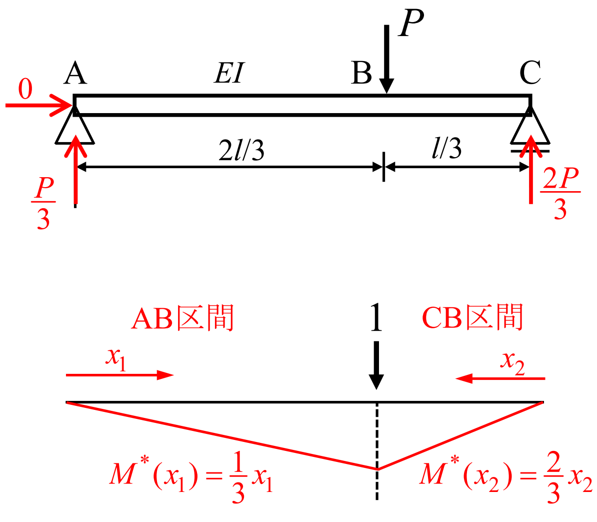
これより、最小となる塑性崩壊荷重は $P_{\mathrm{cr}}=\dfrac{2M_P}{l}$ となる。

３６の問題と同様の方法により、塑性ヒンジ生成点における全塑性モーメントの値と自由体に対する力の釣合いを用いて降伏条件の確認を行うことができる（上図の右図）。すなわち、２番目の崩壊機構では、柱脚での曲げモーメントが $9M_P$ となり全塑性モーメントを超過して降伏条件を満たさないのに対して、１，３番目の崩壊機構では、材端および荷重作用点において降伏条件を満たすことが確認できる。

３９．以下に示す単純梁について、荷重作用点の鉛直変位を単位仮想荷重法を用いて求めよ。



M 図

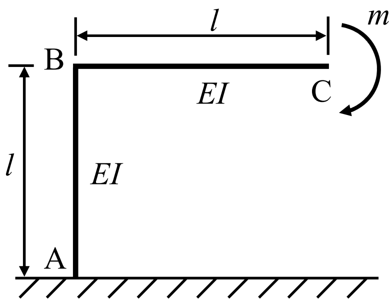


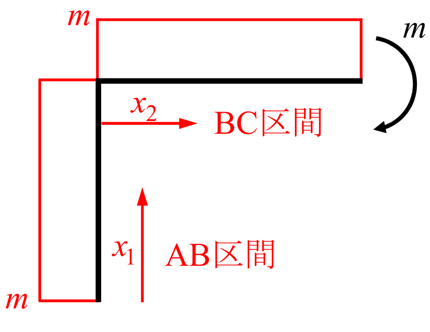
単位仮想荷重に対する M 図

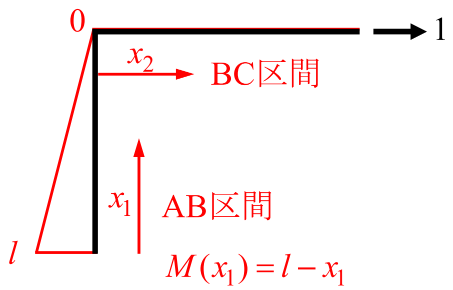
単位仮想荷重法より、

$$
\begin{aligned}
1\cdot v_B &= \int_0^{\frac{2l}{3}} \frac{x_1}{3}\cdot\frac{Px_1}{3EI}dx_1 + \int_0^{\frac{l}{3}} \frac{2x_2}{3}\cdot\frac{2Px_2}{3EI}dx_2 \\
&= \left[\frac{Px_1^3}{27EI}\right]_0^{\frac{2l}{3}} + \left[\frac{4Px_2^3}{27EI}\right]_0^{\frac{l}{3}} \\
&= \frac{8Pl^3}{729EI} + \frac{4Pl^3}{729EI} \\
&= \frac{4Pl^3}{243EI}
\end{aligned}
$$

４０．以下に示す肘型ラーメンについて、C 点の水平変位と回転角を単位仮想荷重法を用いて求めよ。



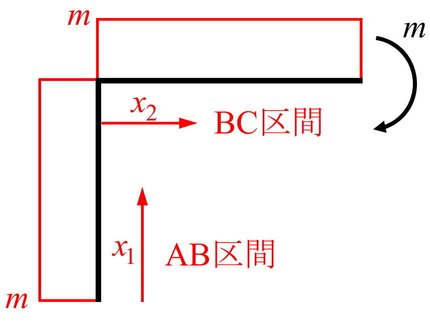


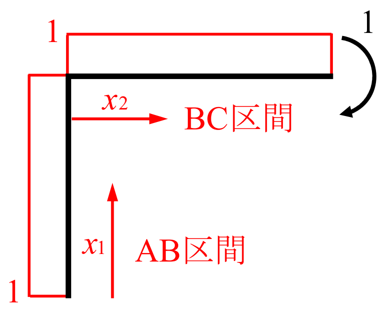


M 図　　　　　　　　　　単位仮想荷重に対する M 図

単位仮想荷重法より、

$$1 \cdot u_C = \int_0^l (l - x_1) \cdot \frac{m}{EI} dx_1 + \int_0^l 0 \cdot \frac{m}{EI} dx_2$$
$$= \frac{ml^2}{2EI}$$



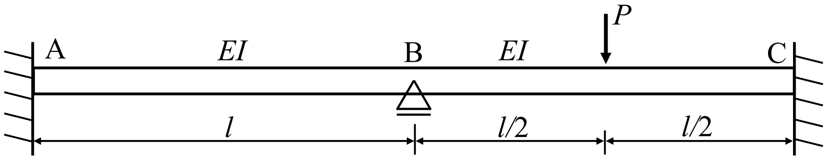


M 図　　　　　　　　　　単位仮想荷重に対する M 図

単位仮想荷重法より、

$$1 \cdot \theta_C = \int_0^l 1 \cdot \frac{m}{EI} dx_1 + \int_0^l 1 \cdot \frac{m}{EI} dx_2$$
$$= \frac{2ml}{EI}$$

４２．以下の図(a)に示す連続梁をたわみ角法を用いて解き、曲げモーメント図を描け。また、支点反力を求めよ。



(a)

たわみ角法の公式より

$$M_{\mathrm{AB}} = \frac{2EI}{l}(\theta_{\mathrm{B}})$$
$$M_{\mathrm{BA}} = \frac{2EI}{l}(2\theta_{\mathrm{B}})$$
$$M_{\mathrm{BC}} = \frac{2EI}{l}(2\theta_{\mathrm{B}}) - \frac{Pl}{8}$$
$$M_{\mathrm{CB}} = \frac{2EI}{l}(\theta_{\mathrm{B}}) + \frac{Pl}{8}$$

B 点における節点方程式より

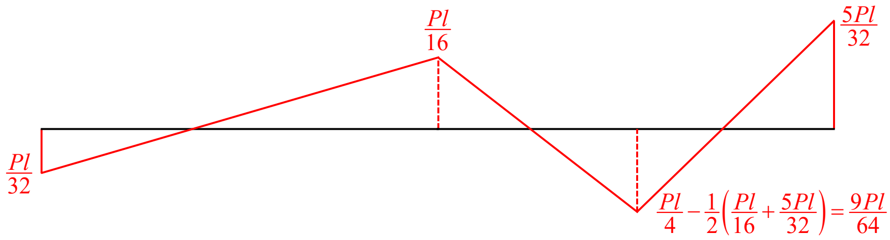
$$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0$$

上式にたわみ角法の公式を代入して

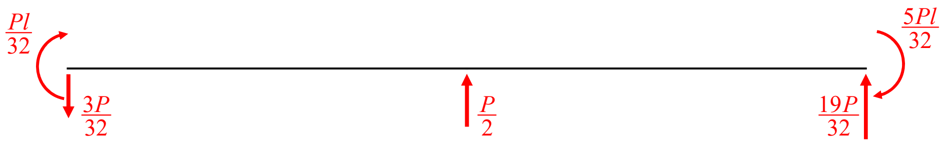
$$\frac{2EI}{l}(2\theta_{\mathrm{B}}) + \frac{2EI}{l}(2\theta_{\mathrm{B}}) - \frac{Pl}{8} = 0$$
$$\theta_{\mathrm{B}} = \frac{Pl^2}{64EI}$$

これより、材端モーメントが次のように求められる。

$$M_{\mathrm{AB}} = \frac{Pl}{32} \quad 、 M_{\mathrm{BA}} = \frac{Pl}{16} \quad 、 M_{\mathrm{BC}} = -\frac{Pl}{16} \quad 、 M_{\mathrm{CB}} = \frac{5Pl}{32}$$

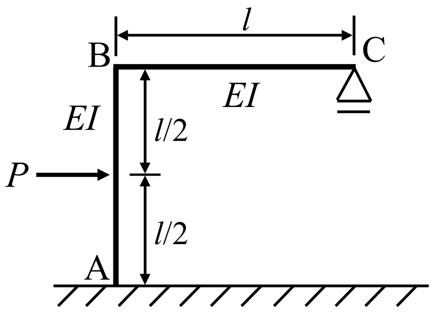


M 図



支点反力

４３．４２の図(b)に示す肘型ラーメンをたわみ角法を用いて解き、曲げモーメント図を描け。また、支点反力を求めよ。



(b)

たわみ角法の公式より

$$M_{AB}=\frac{2EI}{l}\left(\theta_B-3R_{AB}\right)-\frac{Pl}{8}$$

$$M_{BA}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_B-3R_{AB}\right)+\frac{Pl}{8}$$

$$M_{BC}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_B+\theta_C\right)$$

$$M_{CB}=\frac{2EI}{l}\left(2\theta_C+\theta_B\right)=0 \qquad (0)$$

B 点における節点方程式より

$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

式(0)から得られる $\theta_C=-(1/2)\theta_B$ を考慮して、たわみ角法の公式を代入すると

$$\frac{2EI}{l}\left(\frac{7}{2}\theta_B-3R_{AB}\right)+\frac{Pl}{8}=0 \qquad (1)$$

層方程式より

$$Q_{BA}=-\frac{M_{AB}+M_{BA}}{l}-\frac{P}{2}=0$$

たわみ角法の公式を代入して

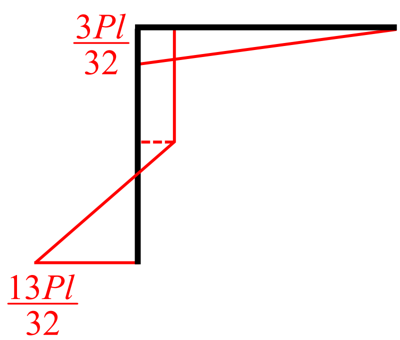
$$\frac{2EI}{l^2}\left(3\theta_B-6R_{AB}\right)+\frac{P}{2}=0 \qquad (2)$$

(1)、(2)より、節点回転角と部材角が次のように求められる。

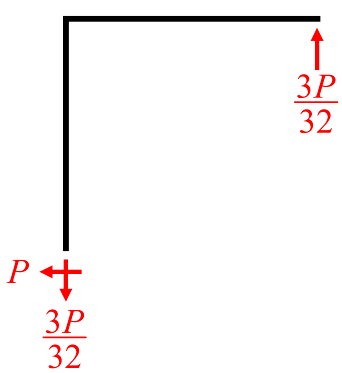
$$\theta_B=\frac{Pl^2}{32EI} \quad 、\quad R_{AB}=\frac{11Pl^2}{192EI}$$

これより、材端モーメントが次のように得られる。

$$M_{AB}=-\frac{13Pl}{32} \quad 、\quad M_{BA}=-\frac{3Pl}{32} \quad 、\quad M_{BC}=\frac{3Pl}{32}$$



M 図



支点反力

４５．本文 45 項の図５の交叉梁において、梁２の長さを梁１の２倍の $2l$ とし、断面２次モーメントを梁１の８倍の $8I$ としたときの A, B, C, D 点の支点反力を求めよ。ただし、長さが２倍になってもその中点で梁１と緊結されているものとする。

単純梁の中央点での鉛直移動剛性は次のようになる。

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

梁 1 と梁 2 の鉛直移動剛性は同じであるので、両梁とも同じ荷重 $\frac{P}{2}$ を負担することになり、A,B,C,D ともに支点反力は $\frac{P}{4}$ となる。